

# Ausbreitungsprozesse in linearen Systemen

Hermann Härtel

([haertel@astrophysik.uni-kiel.de](mailto:haertel@astrophysik.uni-kiel.de))

Gastwissenschaftler am

ITAP - Institut für Theoretische Physik und Astrophysik

Universität Kiel

Leibnizstr. 15



## Inhaltsverzeichnis

Teil 1: Ausbreitungsvorgänge in mechanischen Systemen	
1.1. Grundlagen zum Aufbau von Gasen	3
1.2. Ausbreitungsvorgänge in mechanischen Systemen	5
1.3. Überlagerung von Pulsen in einem geradlinigen Rohr	15
1.4. Strömung in geschlossenen, kreisförmigen Systemen	17
Teil 2: Ausbreitungsvorgänge in elektrischen Systemen	
2.1, Einleitung	25
2.2, Ausbreitungsvorgänge auf einer Doppelleitung	25
2.3, Reflexion an einem Widerstand	33
2.4, Wellenwiderstand / Impedanz	37
2.5, Reihen- und Parallelschaltungen	41



## Teil 1: Ausbreitungsvorgänge in mechanischen Systemen

Der Lerninhalt von Teil 1 dient hauptsächlich der Vorbereitung für einen Elektrizitätskurs über Ausbreitungsvorgänge auf einer elektrischen Doppelleitung. Die wesentlichen Begriffe dabei sind Puls- und Wellenausbreitung, Superposition, Reflexion und Wellenwiderstand.

Unter der Annahme, dass Anfänger einen einfacheren Zugang zu einem mechanischen System finden als zu elektrischen Systemen, werden die genannten Themen zunächst auf Ausbreitungsvorgänge in einem linearen, mit Gas oder Flüssigkeit gefüllten Rohrsystem angewendet.

Im Teil 2 werden die Begriffe wiederholt, wobei deutlich auf Unterschiede und Ähnlichkeiten beider Systeme verwiesen wird.

Die Annahme und Hoffnung ist, dass sich die zusätzlich investierte Zeit zum Studium des mechanischen Systems auszahlen wird durch ein fundierteres Verständnis und durch bessere Lernerfolge.

### 1.1. Grundlagen zum Aufbau von Gasen

Zum Studium des dynamischen Verhaltens von Gasen sind Grundkenntnisse erforderlich über die molekulare Struktur dieser Materieform, über den Unterschied zwischen thermischer Bewegung und Driftbewegung, über die Definition des Drucks. u.a.

Entsprechende Informationen finden sich in den folgenden Abschnitten.

#### 1.1.1. Mikrophysikalischer Aufbau eines Gases

Betrachtet wird im folgenden ein Ausschnitt eines mit Gas gefüllten Rohres.

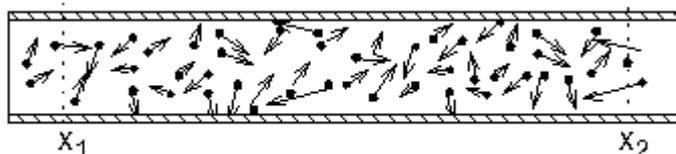


Abb.: 1.1. Thermische Bewegung von Gasatomen oder Molekülen

Ein Gas besteht aus isolierten, atomaren oder molekularen Teilchen, die sich unter Normalbedingungen mit einer relativ großen Geschwindigkeit in alle Richtungen bewegen und beständig miteinander oder mit der Wandung des Behälters zusammenstoßen.

#### 1.1.2. Daten über Luft bei Zimmertemperatur

Luft besteht aus einer Mischung von etwa 20% Sauerstoffmolekülen  $O_2$  und 80% Stickstoffmolekülen  $N_2$ .

Bei Zimmertemperatur und normalem Luftdruck beträgt die mittlere Geschwindigkeit dieser Sauerstoff- bzw. Stickstoffmoleküle etwa 480 m/s. Die mittlere Zahl der Zusammenstöße eines Moleküls liegt in der Größenordnung von  $10^8$  pro Sekunde. Die mittlere, freie Weglänge zwischen zwei Zusammenstößen liegt in der Größenordnung von  $10^{-8}$  m.

### 1.1.3. Druck und Dichte

Die physikalische Größe "Druck" kennzeichnet einen Zustand, bei dem eine Kraft auf eine bestimmte Fläche einwirkt. Sind die Größe der Kraft  $F$  und der Fläche  $a$  bekannt, so wird die Größe des Drucks angegeben als  $F/a$ .

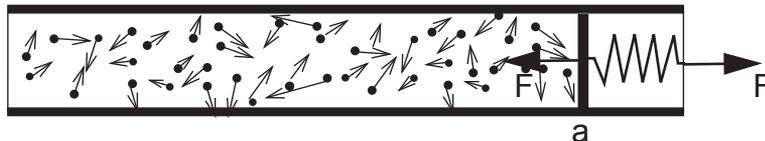


Abb.: 1.2. Druck auf eine Wand, verursacht durch aufprallende Teilchen,

Um die Fläche an der Position  $a$ , die beständig einseitig von den Gasteilchen getroffen wird, im Gleichgewicht zu halten, sei die Kraft  $F$  erforderlich. Dann ist der Druck auf diese Fläche  $P = F/a$ .

Der Druck in einem Gas wird durch die Zahl der Atome oder Moleküle hervorgerufen, die pro Zeiteinheit auf die vorgegebene Fläche auftreffen. Diese Zahl ist proportional zur Dichte des Gases, also zur Zahl der Teilchen pro Volumeneinheit. Der Druck ist weiterhin abhängig von der mittleren, thermischen Geschwindigkeit der mikrophysikalischen Teilchen.

### 1.1.4. Thermische Geschwindigkeit und Gleichverteilung

Die Temperatur eines Gases wird mikrophysikalisch erklärt durch die statistisch-ungeordnete Bewegung seiner Atome bzw. Moleküle.

Je höher die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle, desto höher die Temperatur des Gases. Durch diese thermische Bewegung und die große Zahl der Zusammenstöße wird bewirkt, dass sich die Moleküle gleichmäßig in dem zur Verfügung stehenden Raum verteilen.

Eine solche Gleichverteilung kann nur durch äußere Einflüsse gestört werden. Ohne äußere Einwirkungen bleibt diese thermische Gleichverteilung bestehen. Bleibt nach einer äußeren Störung das System sich selbst überlassen, so stellt sich auf Grund der statistisch-ungeordneten Bewegung der Atome bzw. Moleküle stets wieder eine Gleichverteilung ein.

### 1.1.5. Driftgeschwindigkeit

Von der thermischen Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist eine andere Art der Bewegung zu unterscheiden, die zu einer gleichmäßigen Strömung des Gases führt. Hierbei erhalten die Teilchen alle die gleiche Driftgeschwindigkeit mit gleicher Orientierung. Diese Driftgeschwindigkeit bezieht sich auf eine Bewegung, die alle Gasteilchen innerhalb eines Leitungsabschnittes gemeinsam ausführen und die somit makroskopisch zu beobachten ist.

Die Driftgeschwindigkeit und die thermische Geschwindigkeit überlagern sich.

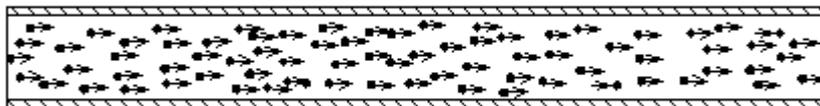


Abb.: 1.3. Darstellung einer gleichmäßigen Strömung  
(ohne Kennzeichnung der thermischen Geschwindigkeit)

Die Driftgeschwindigkeit ist in aller Regel deutlich kleiner als die thermische Geschwindigkeit und liegt im Bereich von einigen mm/s bis m/s.

Die durchschnittliche thermische Geschwindigkeit von Sauerstoff- oder Stickstoffmolekülen liegt unter Normalbedingungen bei etwa 450 m/s.

## 1.2. Ausbreitungsvorgänge in mechanischen Systemen

In Analogie zu einer elektrischen Transportleitung wird für die folgenden Betrachtungen vorausgesetzt, dass das mechanische System aus geradlinigen, langen und dünnen Rohren besteht. Unterschiede in Querrichtung können vernachlässigt werden.

Weiterhin wird vorausgesetzt, dass das in den Rohren befindliche Material nur kleine Fließgeschwindigkeiten aufweist, so dass keine Turbulenzeffekte auftreten.

Unter diesen Bedingungen können die Phänomene Ausbreitung, Superposition und Reflexion in erster Näherung mit den gleichen Gesetzen und Algorithmen beschrieben werden, wie bei einer elektrischen Transportleitung.

### 1.2.1. Darstellung des Drucks $P$ in abstrakter Form

Ein Gas unter normalen Bedingungen besteht aus einer unvorstellbar großen Zahl von atomaren oder molekularen Teilchen, die auch nicht annähernd direkt bildlich dargestellt werden können. Um dennoch die Druckverhältnisse längs eines Rohres wiedergeben zu können, muß an Stelle von bewegten und zusammenstoßenden Teilchen eine abstraktere Form der Darstellung gewählt werden.

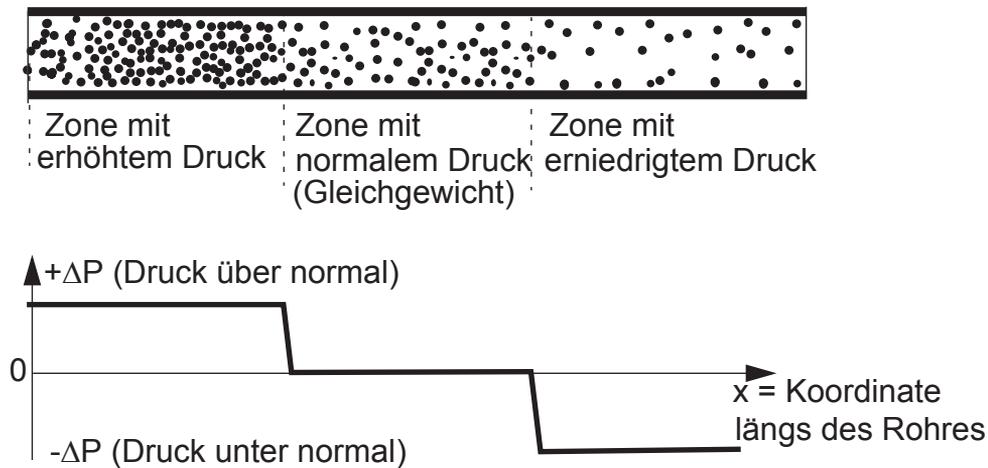


Abb.: 2..1. Graphische Darstellung eines Druckverlaufs

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem entspricht die waagerechte Achse der Ortskoordinate in Längsrichtung des Rohres. Auf der senkrechten Achse wird der Druck aufgetragen. Ein Druck von 0 Einheiten in einem Gas ist nur möglich in einem vollkommenen Vakuum oder wenn die Gasteilchen keine thermische Bewegung mehr ausführen, d.h. bei  $0^{\circ}$  K. Unter normalen Bedingungen ist in einem Gas immer ein Druck vorhanden.

Aus praktischen Gründen wird häufig der Normal- oder Gleichgewichtsdruck gleich Null gesetzt. Ein Druck oberhalb und unterhalb normal wird dann als  $+\Delta P$  oder  $-\Delta P$  gekennzeichnet.

### 1.2.2. Darstellung der Stromstärke $I$ in abstrakter Form

Soll die Strömung eines Gases innerhalb eines Rohres dargestellt werden, so ist es praktisch nicht möglich, die direkte Bewegung der mikrophysikalischen Teilchen zu zeigen. Die Driftgeschwindigkeit der Teilchen in Längsrichtung des Rohres ist in aller Regel sehr viel kleiner als ihre thermische Bewegung und wäre somit nicht erkennbar. Um dennoch solche Strömungsverhältnisse bildlich wiedergeben zu können, muß wiederum eine abstraktere Darstellung gewählt werden.

Diese wird in der folgenden Abbildung vorgestellt.

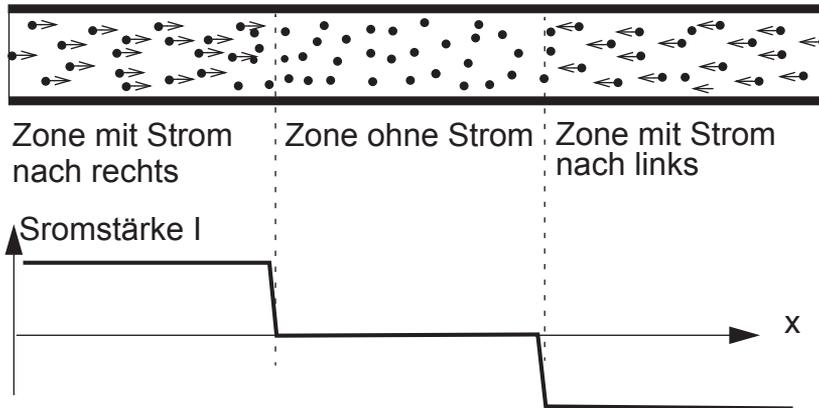


Abb.: 2..2. Graphische Darstellung eines Strömungsverlaufs

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem entspricht die waagerechte Achse der Ortskoordinate in Längsrichtung des Rohres. Auf der senkrechten Achse wird die Stromstärke aufgetragen (positiv bei einer Strömung nach rechts, negativ bei einer Strömung nach links).

### 1.2.3. Ausbreitung mit positiver und negativer Orientierung

Positive und negative Zahlen können auf einer geraden Linie aufgetragen werden wobei das Vorzeichen der Zahl die Orientierung angibt, in der auf der vorgegebenen Richtung die Zahl in Relation zum Nullpunkt aufzutragen ist.

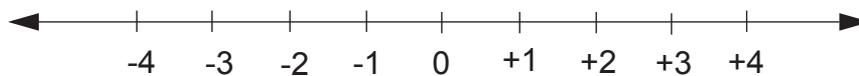


Abb.: 2..3. Positive und negative Zahlen als Beispiel für die Kennzeichnung einer Orientierung bei vorgegebener Richtung

In gleicher Weise kann die Richtung einer Strömung durch ein Vorzeichen gekennzeichnet werden. Um dies zu ermöglichen, muß der Strom parallel zu einer vorgegebenen Richtung und das heißt in einer geraden Linie verlaufen.

Bei einer solchen Richtung wird üblicherweise eine Orientierung als positiv und die andere als negativ bezeichnet und das gleiche gilt dann für die Orientierung einer Stromrichtung.

### 1.2.4. Transport eines Pulses in einem Rohr

Ein Puls in einem mit Gas gefüllten Rohr stellt eine Zone mit erhöhten Druck (erhöhte Teilchendichte) dar, in der die Teilchen eine gemeinsame Driftgeschwindigkeit aufweisen.

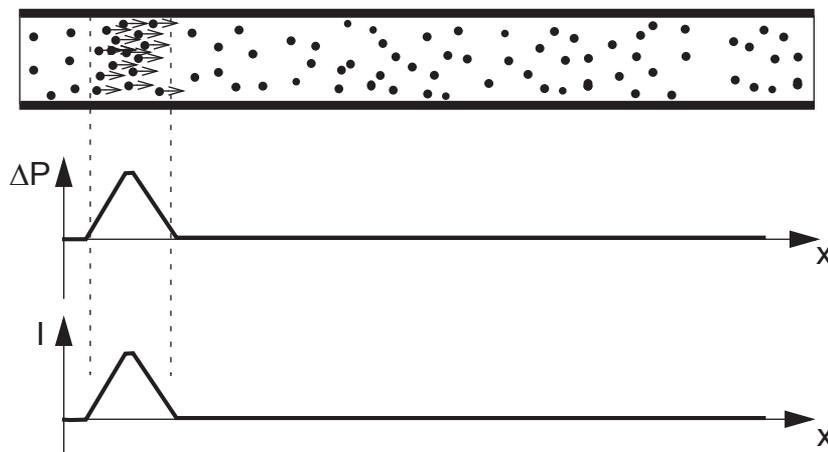


Abb.: 2..4. Bewegung eines Pulses (einer Druckwelle) längs eines mit Gas oder Flüssigkeit gefüllten Rohres

Es erscheint als selbstverständlich, dass ein solcher Puls längs des Rohres mit konstanter Geschwindigkeit übertragen wird, ohne dabei seine Form zu verändern. Trifft der Puls auf das Ende der Leitung so kann er entweder reflektiert oder mehr oder weniger absorbiert werden. Die Simulation zeigt solche Vorgänge sowie die Überlagerung zweier Pulse.

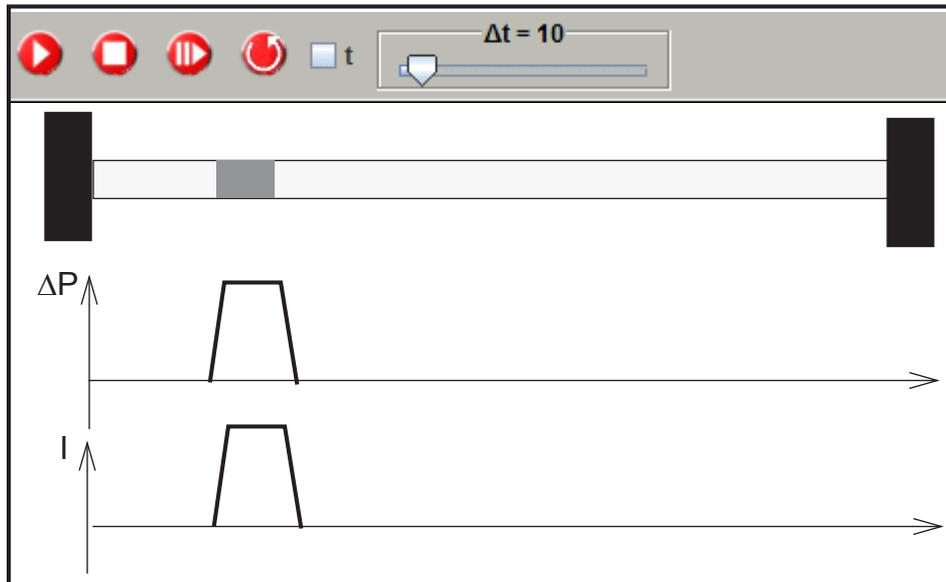


Abb.: 2..5. Simulation der Bewegung eines Pulses, einer Reflexion und einer Überlagerung

### 1.2.5. Eine Zone erhöhten Drucks und ihre Veränderung in der Zeit

Im folgenden wird eine zunächst komplex erscheinende Interpretation eines solchen Bewegungsvorganges vorgestellt, deren Nützlichkeit sich aber bei der Behandlung von Themen wie Superposition und Reflexion erweisen wird.

Die folgende Abbildung zeigt auf der linken Seite eine einzelne Komponente eines Pulses, nämlich eine Zone mit erhöhtem Druck aber ohne Driftgeschwindigkeit. Auf der rechten Seite ist die Situation dargestellt, die sich wenige Augenblicke nach dem Beginn des Ausgleichsvorganges ergibt.

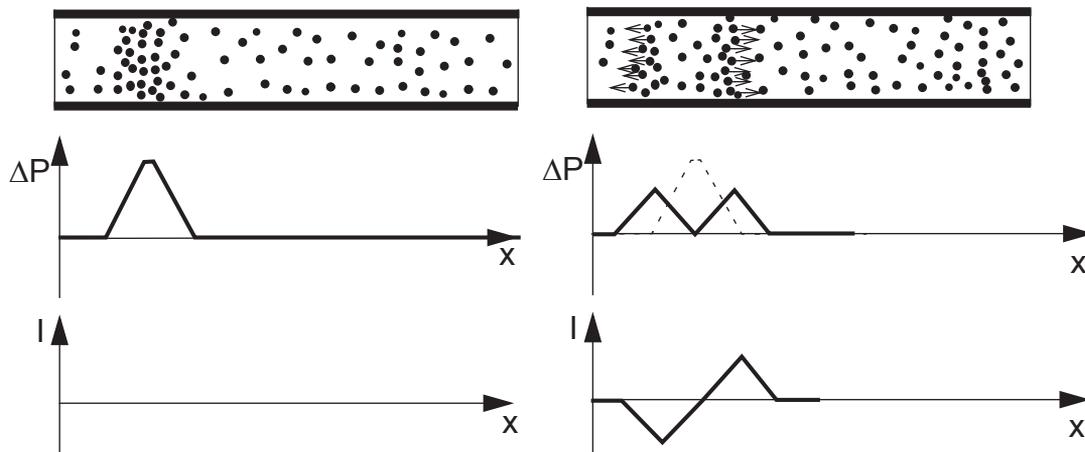


Abb.: 2..6. Verschiebung einer Zone erhöhten Drucks

links: Startposition

rechts: Wenige Augenblicke nach Beginn des Ausgleichsprozesses

Die Teilchen in der komprimierten Zone üben einen größeren Druck auf die benachbarten Teilchen auf als diese ihrerseits aufbringen können. Diese Zone wird sich somit zu beiden

Seiten ausbreiten, wobei die eine Hälfte beginnen wird, nach rechts, die andere Hälfte nach links zu driften.

In der Abbildung ist die Driftgeschwindigkeit der Teilchen durch kleine Pfeile angedeutet. Die thermische Bewegung der Teilchen, die in aller Regel sehr viel größer ist, wird nicht gezeigt, obwohl diese Bewegung die ausschlaggebende Ursache für den einsetzenden Ausgleichsprozess darstellt.

Durch schrittweise Aktivierung der Simulation mit Hilfe der Schritttaste besteht die Möglichkeit, diesen Vorgang im einzelnen zu verfolgen.

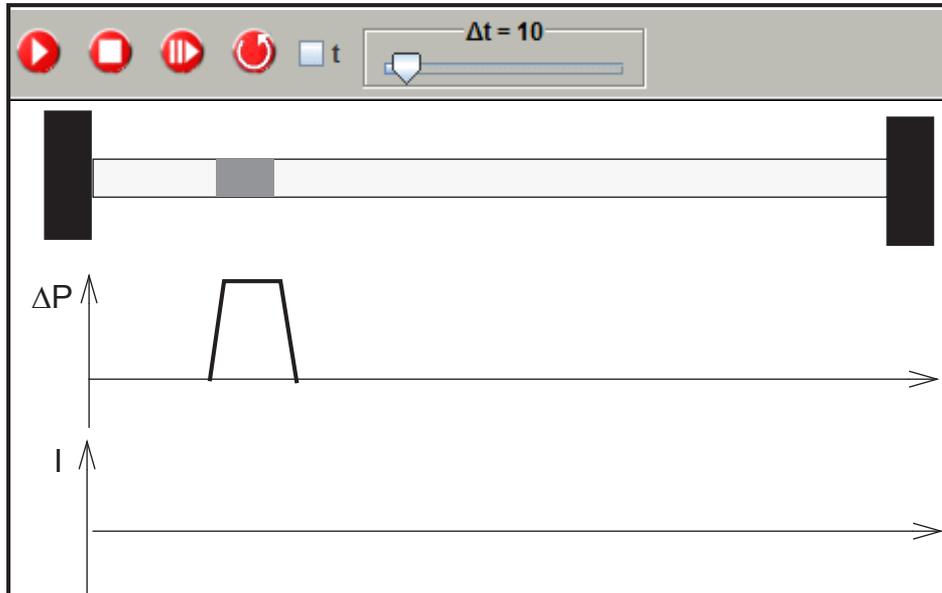


Abb.: 2..7. Simulation der Verschiebung einer schmalen Zonen mit erhöhtem Druck

### 1.2.6. Eine Zone mit driftenden Teilchen und ihre Veränderung in der Zeit

Auf der linken Seite der folgenden Abbildung ist die zweite Komponente eines Pulses, eine Zone mit driftenden Teilchen jedoch ohne veränderten Druck, dargestellt. Außerhalb dieser Zone befinden sich die Teilchen nur in thermischer Bewegung jedoch ohne einheitliche Driftbewegung.

Unter der Annahme, dass dieser instabile Zustand innerhalb eines sehr kurzen Augenblicks erzeugt wurde, stellt die rechte Abbildung den Zustand dar, der sich nach wenigen Zeitschritten ergibt.

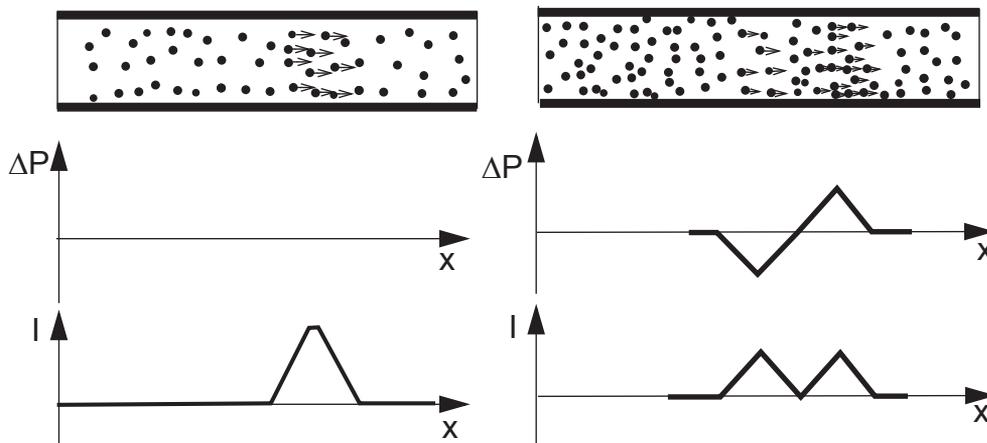


Abb.: 2..8. Verschiebung einer schmalen Zone mit driftenden Teilchen

Links: Ausgangssituation

Rechts: Situation nach wenigen Zeitschritten

Auch in diesem Fall ergibt sich eine Ausbreitung zu beiden Seiten.

Auf der rechten Seite (in Richtung der Driftgeschwindigkeit) erzeugen die driftenden Teilchen eine Zone erhöhten Drucks. Gleichzeitig übertragen sie durch die unvermeidlichen Zusammenstöße ihre Driftgeschwindigkeit auf die Teilchen in dieser benachbarten Zone.

Auf der linken Seite (entgegengesetzt der Driftgeschwindigkeit) hinterlassen die driftenden Teilchen eine Zone mit verringertem Druck. Die Teilchen in dieser Zone beginnen, nach rechts zu driften, da sie von links mehr Zusammenstöße erfahren als von der rechten Seite, von der sich die Nachbarpartikel driftend entfernen.

Die Simulation bieten die Möglichkeit, diesen Vorgang in einzelnen zu untersuchen.

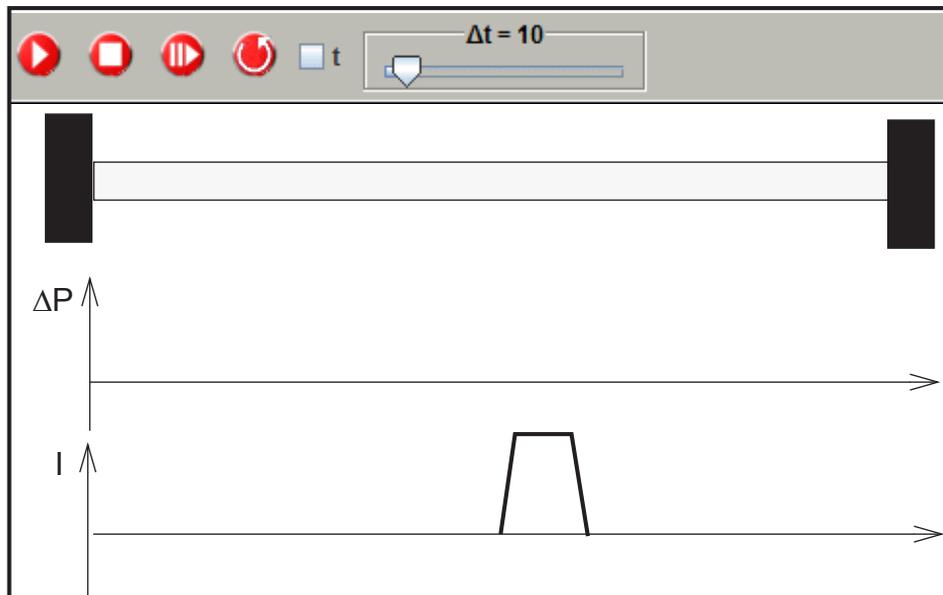


Abb.: 2..9. Simulation der Ausbreitung einer Zone driftender Teilchen

### 1.2.7. Bewegung eines Pulses - Eine neue Interpretation

In der folgenden Abbildung A werden als Ausgangssituation die oben besprochenen Komponenten eines Pulses sowie ihre Zusammensetzung zu einem realen Pulse getrennt darge-

stellt. Der Vergleich zeigt, dass sich die Verschiebung eines Pulses als eine Überlagerung seiner beiden Komponenten deuten lässt.

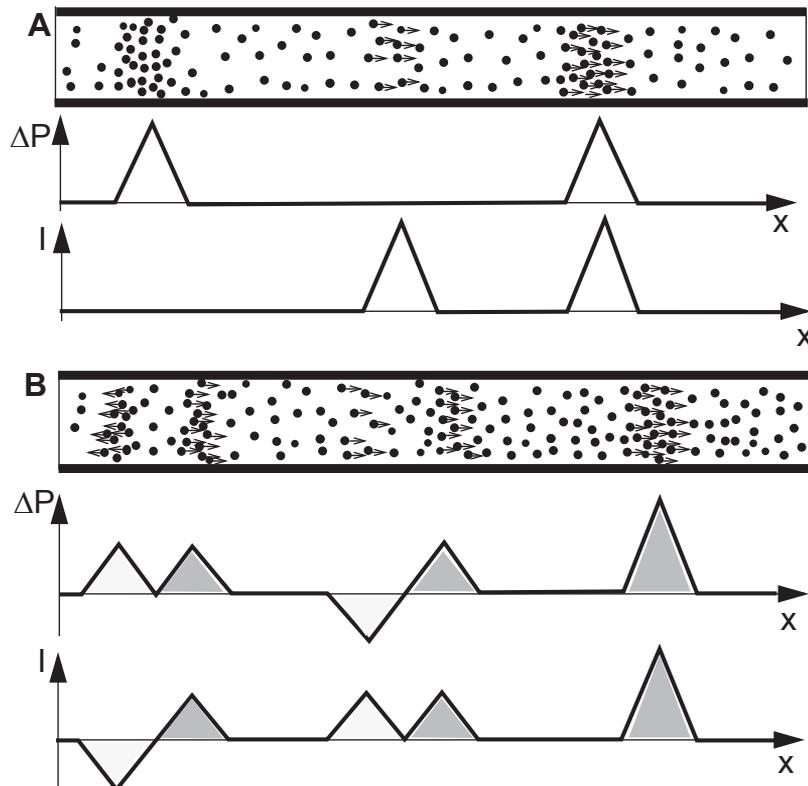


Abb.: 2..10. A: Ausgangslage: Ein Pulse und seine Komponenten an getrennten Orten  
 B: Situation nach einige Zeitschritten

Wie graphisch angedeutet heben sich die Ausbreitung nach links gegenseitig auf, während sich die Ausbreitungen nach rechts addieren. Das Ergebnis ist eine reine Verschiebung des Ausgangspulses nach rechts ohne Änderung seiner Form.

Die Simulation bietet die Möglichkeit, diesen Vorgang im einzelnen zu verfolgen.

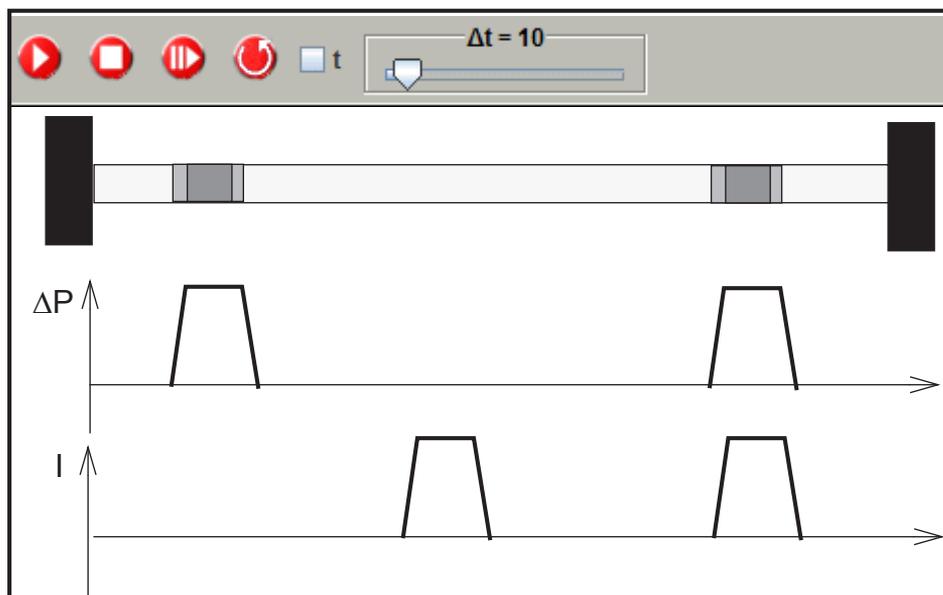


Abb.: 2..11. Simulation der Ausbreitung eines Pulses und seiner Komponenten

### 1.2.8. Wann bewegt sich ein Puls nach rechts, wann nach links?

In dem vorherigen Abschnitt und mit der dort angebotenen Simulation wurde gezeigt, dass sich eine Verschiebung eines Pulses als Überlagerung seiner beiden Komponenten, einer reinen Druckerhöhung ( $\Delta P$ ) und einer reinen Erhöhung der Stromstärke ( $I$ ), erklären lässt.

Bisher waren sowohl die Druckänderung  $\Delta P$  als auch die Driftgeschwindigkeit  $I$  positiv und dies ergab eine Verschiebung in die als positiv definierte Orientierung, in diesem Fall nach rechts.

Die Simulation bietet die Möglichkeit herauszufinden, was passiert, falls  $\Delta P$  und  $I$  negative sind, oder entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen.

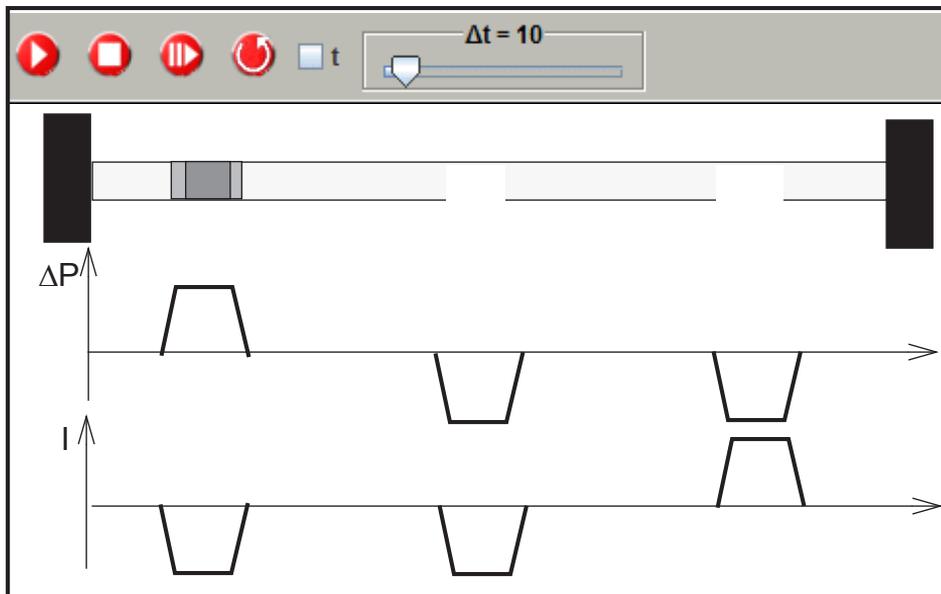


Abb.: 2..12. Simulation einer Pulsübertragung in entgegengesetzten Richtungen

Das von der Simulation gezeigte Ergebnis lässt sich in Form einer einfachen Regel zusammenfassen:

Sind die Vorzeichen von  $\Delta P$  und  $I$  beide entweder positiv oder negativ, so bewegt sich der Puls in die positive Richtung. Bei entgegengesetzten Vorzeichen bewegt sich der Puls in die negative Richtung.

Es mag eine lehrreiche Aufgabe sein, den Fall eines Pulses mit negativem  $\Delta P$  und negativem  $I$  wie im vorherigen Abschnitt detailliert zu untersuchen, um zu erklären, warum sich ein solcher Puls ebenfalls in die positive Richtung bewegt, obwohl die Teilchen in die negative Richtung driften.

### 1.2.9. Ausbreitung eines Pulses bei beliebigem Verhältnis von $\Delta P/I$

Anhand der bisherigen Abschnitte sollte deutlich geworden sein, dass sich ein Puls seitlich ohne Änderung der Form verschiebt, falls sich die Ausbreitung seines Druckanteils und seines Stromanteils einerseits addieren und andererseits gegenseitig auslöschen. Letzteres ist jedoch nur möglich, wenn  $\Delta P/I$  in einem ganz bestimmten Verhältnis zueinander stehen.

Die folgende Abbildung A zeigt einen Puls mit einem geänderten Verhältnis  $\Delta P/I$ . Zusätzlich sind die beiden Druck- und Stromanteile jeweils an zwei getrennten Orten eingezeichnet.

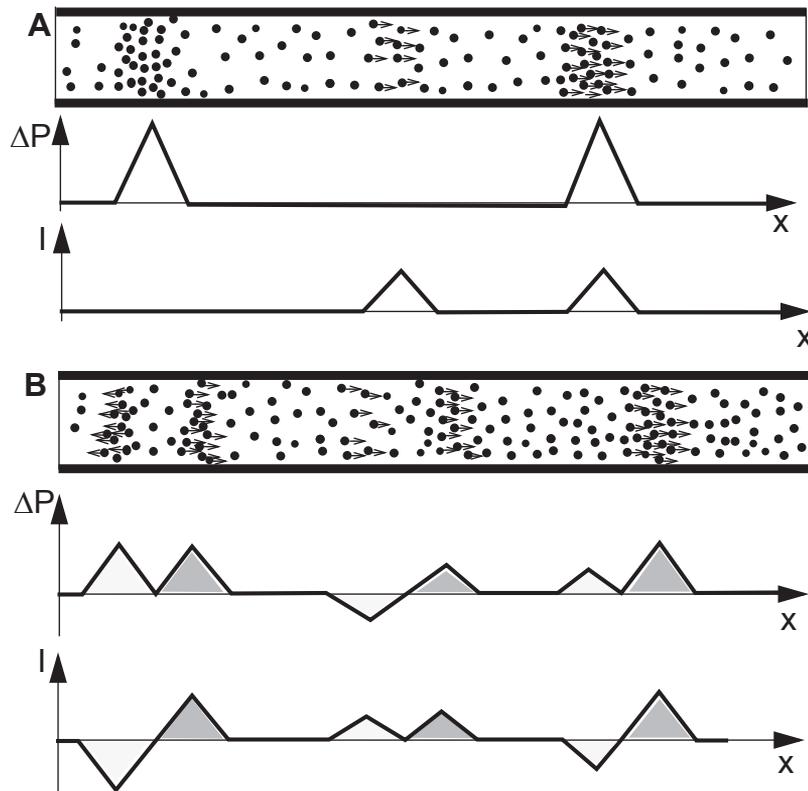


Abb.: 2..13. Verschiebung eines Pulses mit einem geänderten Verhältnis von  $\Delta P/I$   
 A: Ausgangssituation B: Situation nach wenigen Zeitschritten

Die in Abbildung B dargestellte Situation zeigt, dass sich aufgrund des vorgegebenen Verhältnisses von  $\Delta P/I$  die Verschiebungen nach links nicht gegenseitig aufheben. Somit ergibt sich in diesem Fall keine reine Verschiebung des Ausgangspulses, sondern eine Aufspaltung in zwei Pulse, die auseinander laufen.

Wiederum zeigt sich, dass sich das Ergebnis als Überlagerung zweier Ausbreitungsvorgänge deuten läßt: einer beidseitigen Ausbreitung der Zone erhöhten Drucks sowie der Zone mit driftenden Teilchen.

Diese Situation wird in der folgenden Simulation vorgegeben. Bei schrittweisem Ablauf der Simulation kann der Ausgleichsprozess im einzelnen verfolgt werden. .

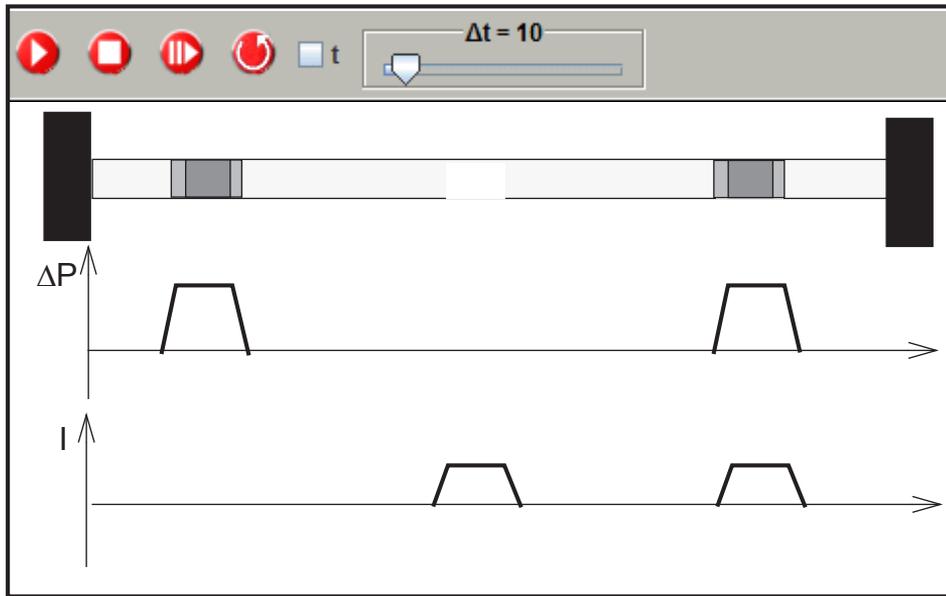


Abb.: 2..14. Simulation der Verschiebung eines Pulses mit einem geänderten Verhältnis von  $\Delta P/I$

Durch Variation der Ausgangssituation kann überprüft werden, dass dieses Prinzip der Überlagerung - auch Superposition genannt - allgemein gültig ist.



## 1.3. Überlagerung von Pulsen in einem geradlinigen Rohr

### 1.3.1. Lineare Überlagerung

Im vorangegangenen Kapitel wurde erklärt, unter welchen Bedingungen sich auf einer Leitung ein Puls, bestehend aus einer Zone mit verändertem Druck sowie driftenden Teilchen, in eine bestimmte Richtung ausbreitet, ohne dabei die Form zu verändern.

Jetzt gilt es zu untersuchen, was geschieht, wenn zwei derartige Pulse aus entgegengesetzter Richtung aufeinandertreffen. Dabei wird eine wichtige, einschränkende Voraussetzung gemacht. Diese besagt, dass nur solche Fälle untersucht werden, bei denen die Änderungen bezüglich Druck und Stromstärke klein sind gegenüber den Werten, die in dem System grundsätzlich möglich sind. Ist z.B. in einem Rohr ein maximaler Druck von 100 Druckeinheiten möglich, so untersucht man nur kleine Druckschwankungen von wenigen Prozent dieses Wertes. Unter diesen Umständen kann man in guter Näherung annehmen, dass sich beim Aufeinandertreffen von zwei Pulsen die beiden Druckschwankungen linear addieren und sich nicht weiter gegenseitig beeinflussen. Das gleiche wird für die Änderungen der Stromstärke angenommen. Auch hier wird angenommen, dass sich Teilströme linear addieren.

### 1.3.2. Überlagerung gleich großer Pulse

In der folgenden Abbildung sind zwei gleich große Pulse vorgegeben, die sich aufeinander zu bewegen.

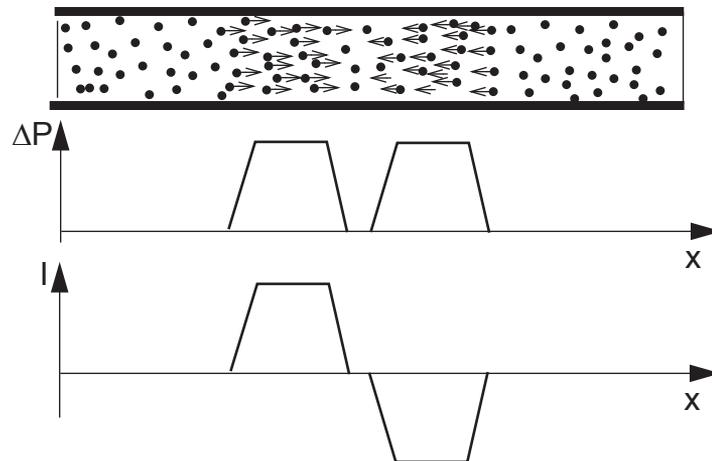


Abb.: 3..1. Zwei Pulse mit entgegengesetzter Driftbewegung

Die Simulation zeigt, wie diese Pulse aufeinander zu laufen, sich vollständig überlagern und wieder trennen.

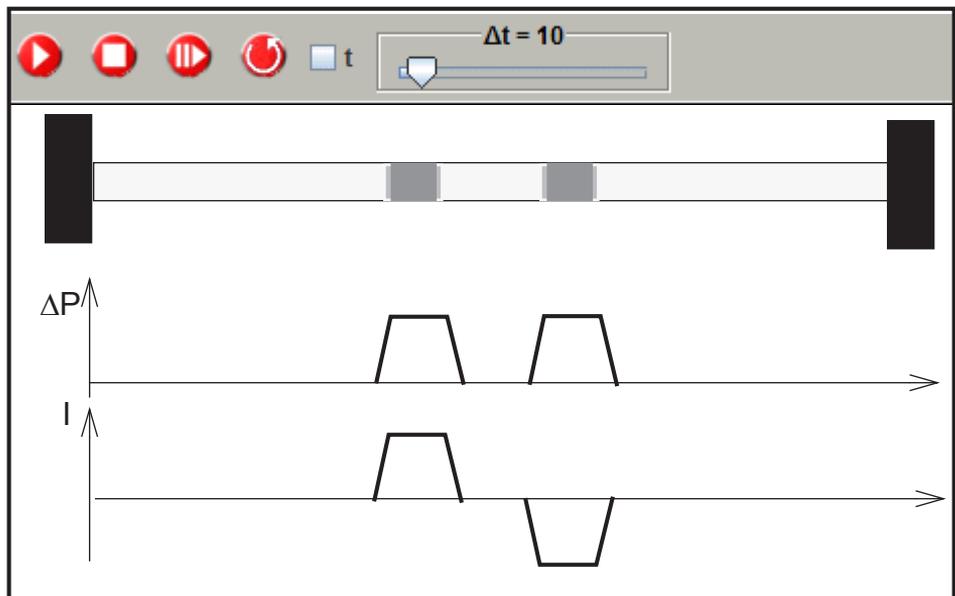


Abb.: 3.2. Simulation der Bewegung zweier Pulse mit entgegengesetzter Driftbewegung  
Es empfiehlt sich ein Vergleich dieses Vorganges mit der Situation, die im Abschnitt "1.2.5. Eine Zone erhöhten Drucks und ihre Veränderung in der Zeit" vorgestellt wurde.

### 1.3.3. Überlagerung unterschiedlicher Pulse

In der folgenden Simulation sind zwei unterschiedlich große Pulse vorgegeben, die sich aufeinander zu bewegen.

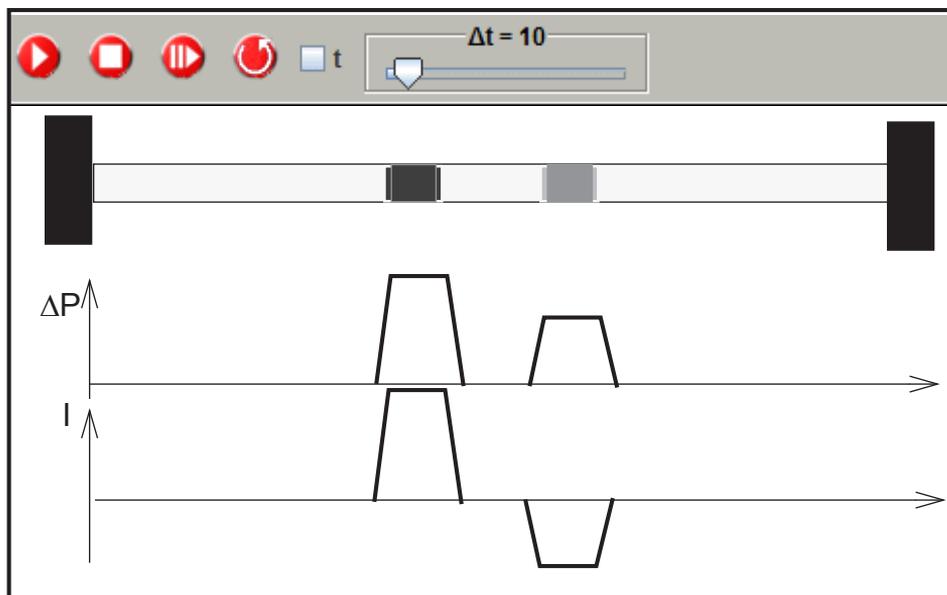


Abb.: 3.3. Simulation der Überlagerung zweier verschieden großer Pulse  
Eine besondere Situation ergibt sich in dem Moment, wenn beide Pulse sich vollständig überlagern. Es empfiehlt sich ein Vergleich mit der Situation, die im Abschnitt "1.2.9. Ausbreitung eines Pulses bei beliebigem Verhältnis von  $\Delta P/I$ " vorgestellt wurde.

## 1.4. Strömung in geschlossenen, kreisförmigen Systemen

### 1.4.1. Einleitung

Neben einfachen Leitungen zum Transport von Gasen oder Flüssigkeiten finden sich in der Natur und Technik geschlossene kreisförmige Systeme, in denen ein Strom, angetrieben von einer Pumpe, im Kreis herumströmt und dabei durch einen Widerstand oder durch einen Energieumwandler gedrückt wird.

Solche geschlossenen Strömungssysteme sind überwiegend nicht mit Gas, sondern mit einer Flüssigkeit gefüllt. Der Blutkreislauf bei Säugetieren ist ein Beispiel aus der Biologie, die Warmwasserheizung ein Beispiel aus der Technik.

Elektrische Geräte oder Anlagen weisen stets eine solche kreisförmige Struktur auf, bei denen Ladungsträger einen in sich geschlossenen elektrischen Stromkreis bilden. Um den Zugang zu solchen eher abstrakten elektrischen Systemen zu erleichtern, wird im folgenden ein solches kreisförmiges System anhand eines leichter zugänglichen mechanischen Beispiels behandelt.

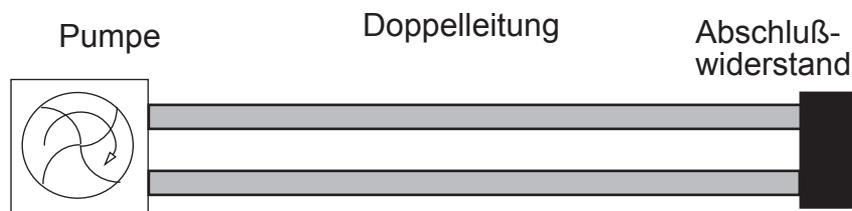


Abb.: 4.1. Ein geschlossenes System mit Hinleitung, Rückleitung und Abschlußwiderstand

Als kreisförmiges System wird eine sehr einfache, symmetrische Anordnung betrachtet, eine sogenannte Doppelleitung, bei der eine Pumpe durch zwei gerade, parallele und dünne Leitungen mit einem Abschlußwiderstand verbunden wird. Außerdem wird angenommen, dass nur relativ kleine Stromstärken vorkommen, so dass Turbulenzen ausgeschlossen sind. Nur für ein solches einfaches System existiert eine mathematische Theorie, die es erlaubt, Stromstärke  $I$  und Druckunterschied  $\Delta P$  in Abhängigkeit des Ortes und der Zeit anzugeben.

### 1.4.2. Druck und Strömung in einer Doppelleitung

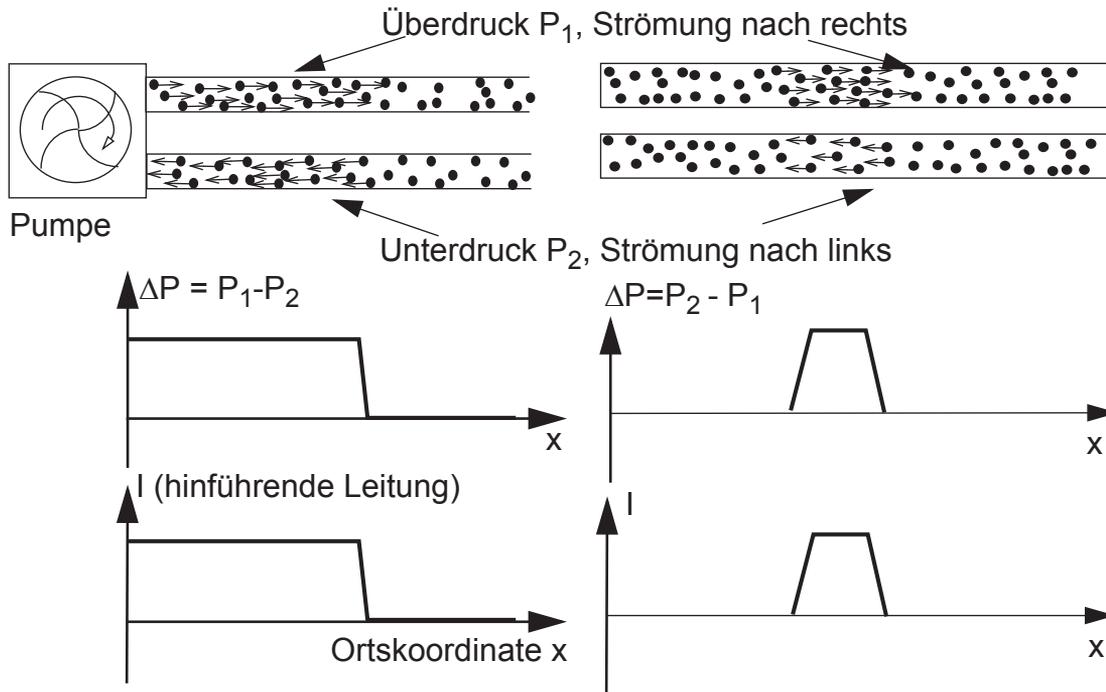


Abb.: 4.2. Druck und Stromangaben für einen startenden Strom (links) in einen Puls (rechts) auf einer Doppelleitung

In einer Doppelleitung wird ein Strom (linke Abbildung) oder ein Puls (rechte Abbildung) erzeugt, in dem die Pumpe entweder kontinuierlich oder nur kurzzeitig Materie von einer Zuleitung zur anderen befördert. Um dies zu erreichen, muß die Pumpe eine Druckdifferenz zwischen ihren beiden Ausgängen aufrecht erhalten und zwar einen erhöhten Druck  $P_1$  auf der zum Abschluß hinführenden und einen verringerten Druck  $P_2$  auf der zur Pumpe rückführenden Leitung.

In der Rückleitung entsteht eine zur Pumpe hin gerichtete Strömung und in der hinführenden Leitung eine von der Pumpe weg gerichtete Strömung. Aufgrund der Symmetrie der Anlage sind diese Größen (Druckunterschied zum Normaldruck und Stromstärke) für eine bestimmten Ortskoordinate  $x$  und zu einem gegebenen Zeitpunkt bis auf das Vorzeichen gleich groß.

Üblicherweise wird für eine Doppelleitung die Druckdifferenz sowie der Strom auf die hinführende Leitung bezogen. Druckdifferenz und Strom in der rückführenden Leitung sind dann betragsmäßig gleich groß, weisen aber jeweils das entgegengesetzte Vorzeichen auf.

### 1.4.3. Ausbreitung eines Pulses in einer Doppelleitung

Ein durch die Pumpe erzeugter Puls bewege sich von der Pumpe weg, das heißt in der Abbildung nach rechts. Dieser Übertragungsprozess kann in der gleichen Weise interpretiert werden, wie bei einem Puls auf einer Einzelleitung.

Sowohl  $\Delta P$  als auch  $I$  breiten sich zu beiden Seiten aus, heben sich auf einer Seite gegenseitig auf und verstärken sich auf der anderen Seite. Als Resultat der Überlagerung ergibt sich eine reine Verschiebung des Pulses ohne Änderung der Form.

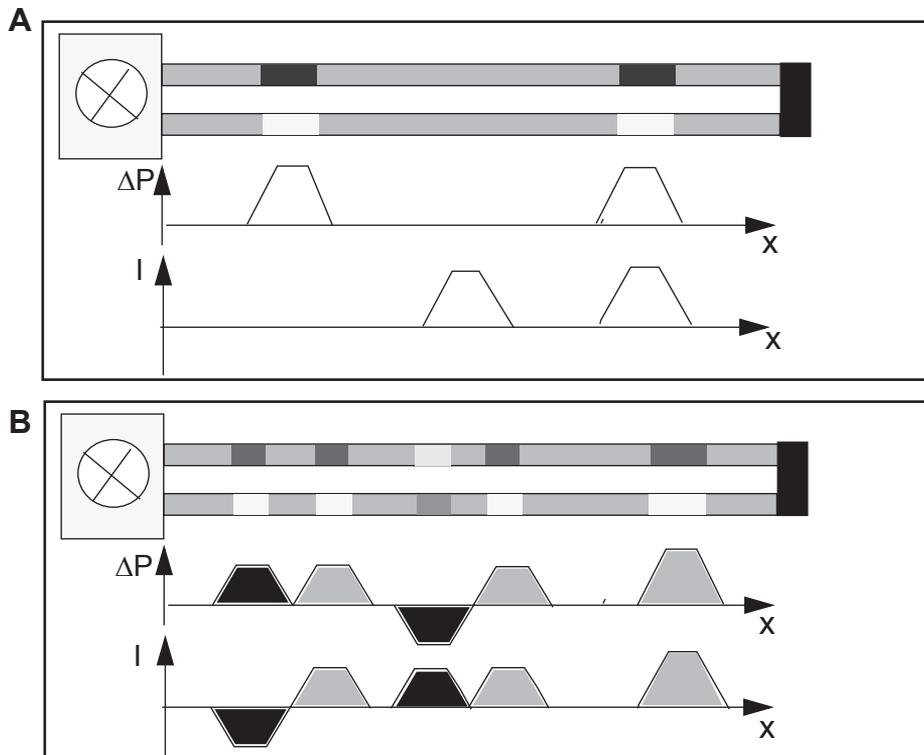


Abb.: 4.3. A: Ausgangssituation: Zwei Pulskomponenten und ein kompletter Pulse  
 B: Situation nach wenigen Zeitschritten: Ausbreitung zu beiden Seiten  
 und Verschiebung des Pulses ohne Änderung der Form

Mit Hilfe der folgenden Simulation kann dieser Vorgang im einzelnen nachvollzogen werden. Dabei ist es ratsam, die Simulation mit der Schritttaste zu aktivieren.

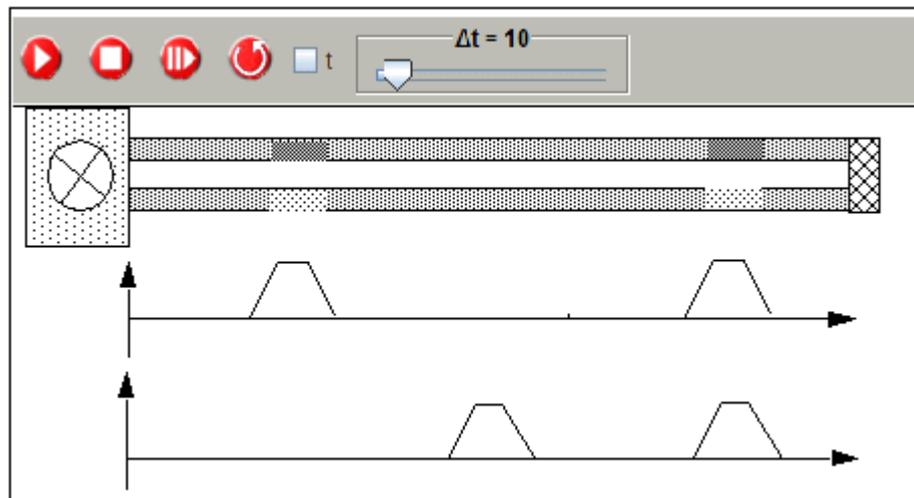


Abb.: 4.4. Verschiebung bzw. Ausbreitung eines Pulses und seiner Komponenten

#### 1.4.4. Reflexion eines Pulses an einem Abschlußwiderstand mit $R = \infty$

Die folgende Abbildung zeigt einen Puls, der sich auf die offenen Enden einer Doppelleitung zu bewegt.

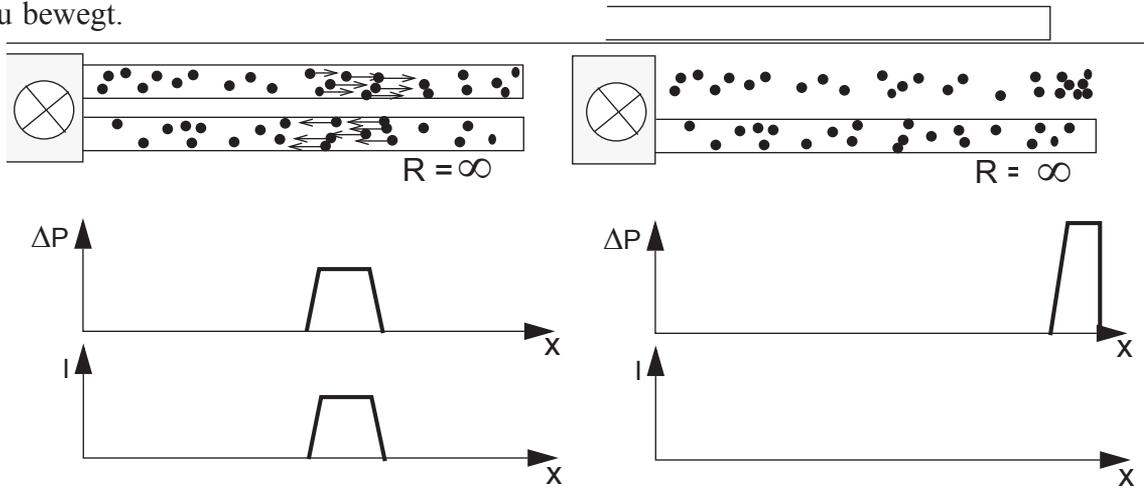


Abb.: 4.5. Links: Ein Puls bewegt sich in Richtung auf das offene Ende einer Doppelleitung zu  
Recht: Druckverhältnis im Augenblick der Reflexion

Durch den unendlich großen Abschlußwiderstand wird die Driftbewegung gestoppt und es wird eine Zone erhöhten Drucks (auf der hinführenden Leitung, aber reduzierten Drucks auf der Rückleitung) vor dem Abschlußwiderstand aufgebaut.

In dem Augenblick, in dem die Driftbewegung zum Stillstand gekommen ist, ist eine Situation erreicht, die im Kapitel "1.2.5. Eine Zone erhöhten Drucks und ihre Veränderung in der Zeit" behandelt wurde. Es existiert eine Zone erhöhten Drucks ohne Driftbewegung, die sich nach beiden Seiten ausbreitet. Die Ausbreitung nach rechts in Richtung des Abschlußwiderstandes ist jedoch blockiert und somit wird dieser Anteil vollständig reflektiert. Als Ergebnis wird der gesamte Puls ohne Formänderung reflektiert.

Die Simulation zeigt den Ablauf dieses Reflexionsprozesses.

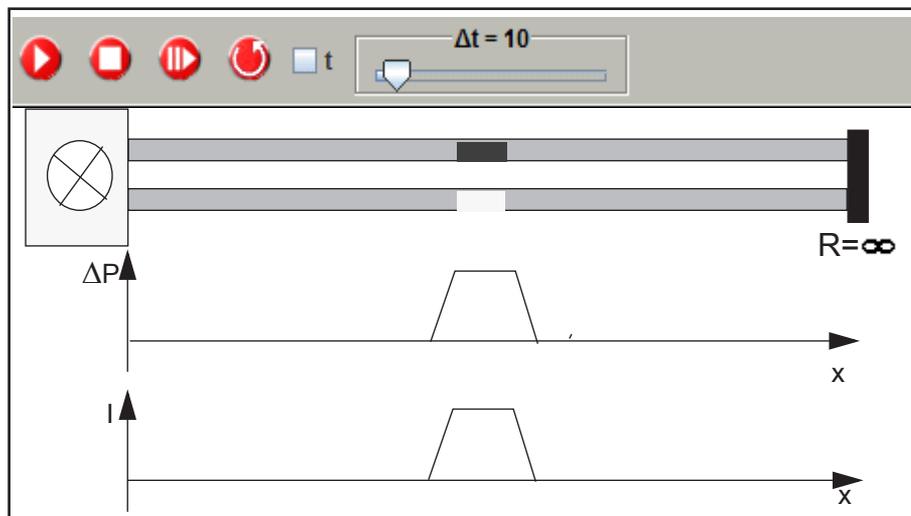


Abb.: 4.6. Reflexion eines Pulses an einem Abschlußwiderstand mit  $R = \infty$

### 1.4.5. Reflexion einer Stromflanke an einem Abschlußwiderstand mit $R = \infty$

Die folgende Abbildung zeigt die Flanke eines kontinuierlichen Stromflusses, die sich auf das offene Ende einer Doppelleitung zu bewegt.

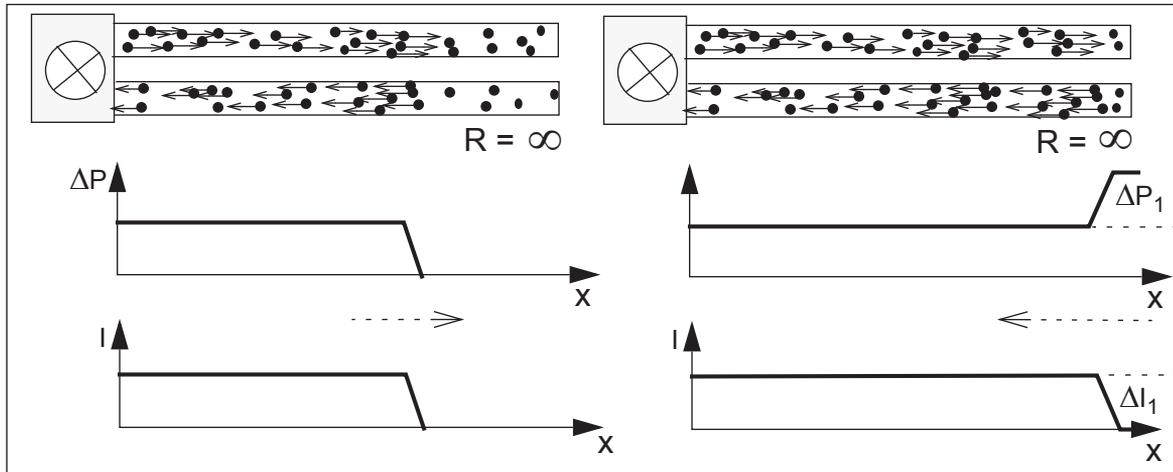


Abb.: 4.7. Links: Eine Stromflanke bewegt sich in Richtung auf das offene Ende einer Doppelleitung zu  
 Recht: Druck- und Strömungsverhältnisse im Augenblick der Reflexion

Die driftenden Teilchen werden vor dem Abschlußwiderstand abgestoppt, wodurch sich eine Zone erhöhten Drucks ergibt. Die so entstandene Flanke mit dem Verhältnis  $\Delta P_1 / -\Delta I_1$  bewegt sich zurück zur Pumpe wodurch der gesamte Strom zum Stillstand kommt.

Die Simulation zeigt diesen Reflexionsvorgang. .

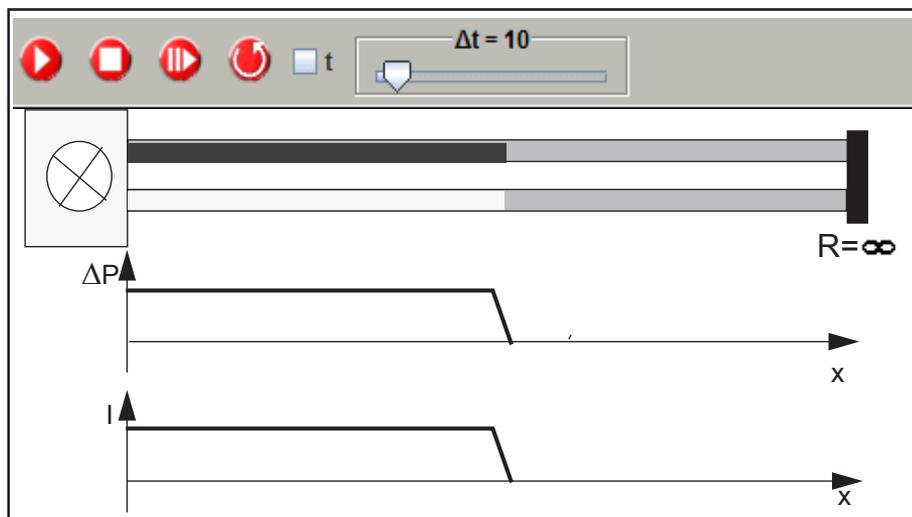


Abb.: 4.8. Simulation der Bewegung einer Stromflanke auf einer Doppelleitung mit dem Abschlußwiderstand  $R = \infty$

### 1.4.6. Reflexion eines Pulses an einem Abschlußwiderstand mit $R=0$

Die folgende Abbildung zeigt einen Puls, der sich auf die direkt verbundenen Abschlüsse einer Doppelleitung zu bewegt..

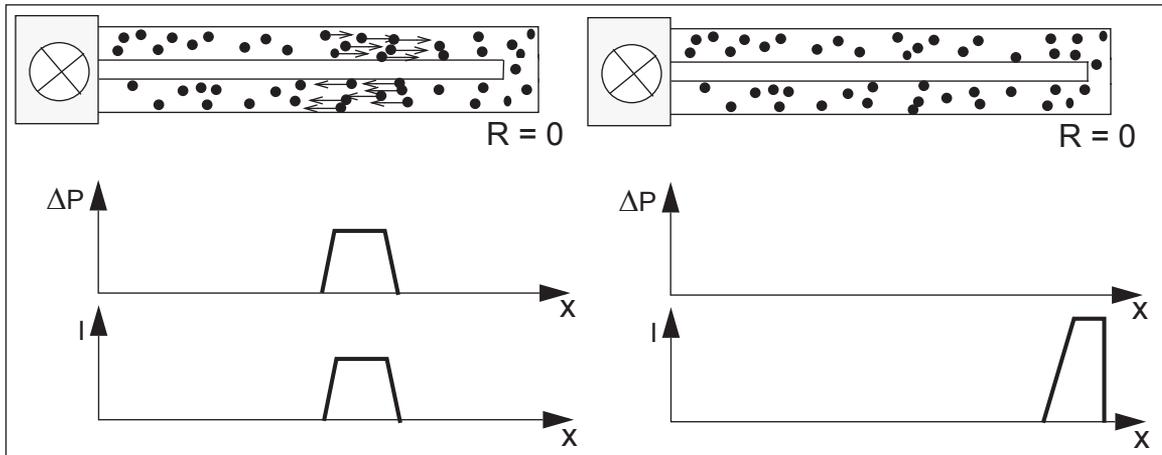


Abb.: 4.9. Links: Ein Puls bewegt sich in Richtung der direkt verbundenen Enden einer Doppelleitung  
 Recht: Druck- und Stromverhältnisse im Augenblick der Reflexion

Trifft der Puls auf das kurzgeschlossene Ende der Doppelleitung mit  $R = 0$ , so wird der Druckunterschied auf den Leitungen ausgeglichen. Dieser Druckausgleich wirkt sich beschleunigend auf die Driftbewegung der Teilchen aus und erhöht kurzfristig deren Driftgeschwindigkeit.

Die Situation in der Mitte des Reflexionsvorgangs entspricht derjenigen, die in dem Kapitel "1.2.6. Eine Zone mit driftenden Teilchen und ihre Veränderung in der Zeit" behandelt wurde. Der Strompuls (ohne  $\Delta P$ ) am kurzgeschlossenen Ende der Doppelleitung breitet sich nach beiden Seiten hin aus und führt zu einem rücklaufenden Puls mit entgegengesetzten Vorzeichen für  $\Delta P$  und  $I$ .

Die Simulation zeigt diesen Reflexionsvorgang.

### 1.4.7. Reflexion einer Strömung an einem Abschlußwiderstand mit $R=0$

Die folgende Abbildung zeigt eine einsetzende Strömung, die sich auf die direkt verbundenen Abschlüsse einer Doppelleitung zu bewegt ( $R = 0$ ).

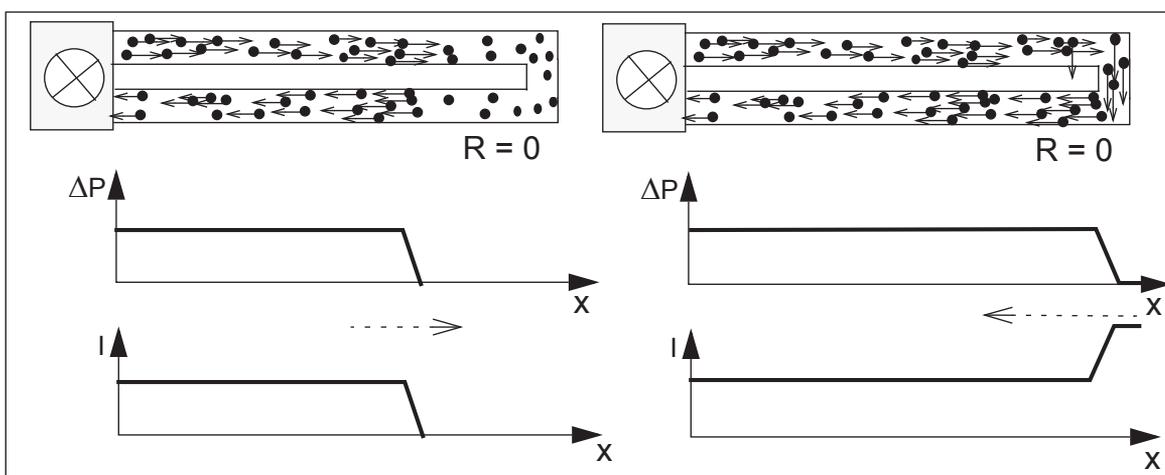


Abb.: 4.10. Links: Bewegung einer Strömungsflanke in Richtung des kurzgeschlossenen Abschlusses einer Doppelleitung  
 Rechts: Druck- und Stromverhältnisse im Augenblick der Reflexion

Trifft eine Strömungsflanke, die von einer startenden Pumpe erzeugt wurde, auf das kurzgeschlossene Ende einer Doppelleitung, so werden an dieser Stelle die Druckunterschiede auf beiden Leitungen ausgeglichen. Dieser Druckausgleich wirkt sich beschleunigend auf die dort driftenden Teilchen aus und erhöht deren Driftgeschwindigkeit.

Das dadurch bewirkte geänderte Verhältnis von  $\Delta P/I$  ergibt eine zur Pumpe zurücklaufende Strömungsflanke.

Die Simulation zeigt diesen Reflexionsvorgang.

#### 1.4.8. Abschlußwiderstand ohne Reflexion

Die Größe des Abschlußwiderstandes einer Doppelleitung kann derart gewählt werden, dass das Verhältnis  $\Delta P/I$  eines Pulses beim Auftreffen nicht verändert wird. Das bedeutet, dass während des Auftreffens der Druckunterschied zwischen den Leitungen sowie die Driftgeschwindigkeiten proportional reduziert oder ausgeglichen werden. Ein solcher Abschlußwiderstand bewirkt somit keine Reflexion.

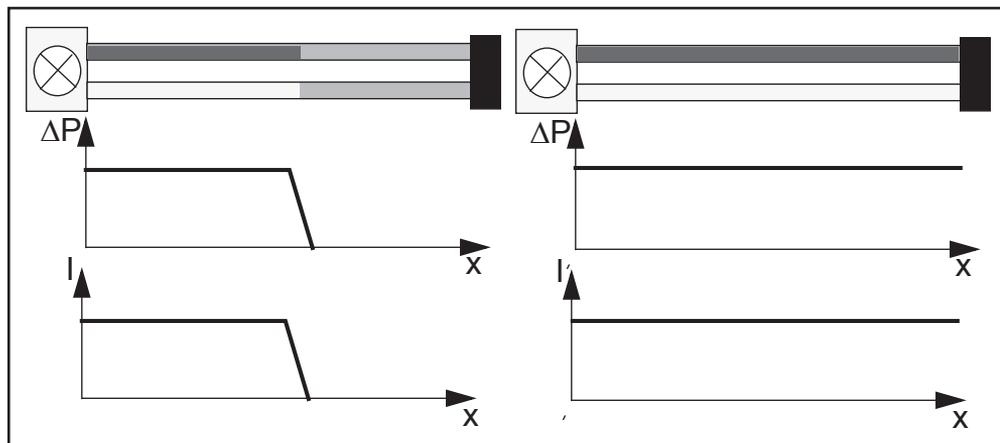


Abb.: 4.11. Links: Bewegung einer Strömungsflanke in Richtung eines reflexionsfreien Abschlusses einer Doppelleitung  
Rechts: Druck- und Stromverhältnisse nach dem Auftreffen

Die Simulation zeigt diesen Vorgang. Sie zeigt ebenfalls den Fall einer partiellen Reflexion, sofern der Abschlußwiderstand eine Änderung des Verhältnisses von  $\Delta P/I$  der eintreffenden Strömungsflanke bewirkt.



## Teil 2: Ausbreitungsvorgänge in elektrischen Systemen

### 2.1. Einleitung

Ein wesentliches Merkmal des vorliegenden Lernmaterials ist die durchgängige Nutzung eines Simulationsprogramms - genannt TL-Transportleitung/Transmission-Line- mit dessen Hilfe die Ausbreitungsvorgänge auf einer Doppelleitung visualisiert werden können.

Das Simulationsprogramm TL basiert auf der eindimensionalen Lösung der Maxwell'schen Gleichungen. Der entwickelte Algorithmus hat sich als zuverlässig und stabil unter allen einstellbaren Rand- und Anfangsbedingungen erwiesen.<sup>1</sup>

Voraussetzung für die Bearbeitung des vorliegenden Lernmaterials sind Grundkenntnisse zum elektrischen Stromkreis, wie sie in dem Lernprogramm "Der sogenannte einfache elektrische Stromkreis" zu finden sind (siehe unten angegebene Netzadresse). Darin wird u.a. die Existenz von Oberflächenladungen bei stromführenden Leitern behandelt, die ein qualitatives Verständnis des Spannungsbegriffs ermöglichen.

Der Schwerpunkt des vorliegenden Lernprogramms liegt auf der Behandlung von Übergangsprozessen, die stets auftreten, wenn sich irgendwelche Bedingungen innerhalb eines Stromkreises ändern. Auch hier ist das Wissen um die Existenz von Oberflächenladungen von Bedeutung.

Moderne Rechner eröffnen einen bisher nicht möglichen Zugang zur Visualisierung solcher Übergangsprozesse und unterstützen so den Zugang zu einem tieferen und qualitativen Verständnis elektrischer Phänomene.

### 2.2. Ausbreitungsvorgänge auf einer Doppelleitung

#### 2.2.1. Aufbau einer Doppelleitung

Im Gegensatz zum mechanischen Fall gibt es bei elektrischen Systemen nur wenige Fälle, wie zum Beispiel bei einem Blitzeinschlag, oder bei Nervenbahnen, wo sich die elektrischen Ladungsträger nicht innerhalb eines geschlossenen Systems bewegen.

In allen praktisch bedeutsamen Fällen bestehen elektrische Systeme aus einer Energiequelle und aus einem oder mehreren Verbrauchern, die mit entsprechenden Leitungen zu einem in sich geschlossenen System verbunden sind.

Zur Erzeugung eines Stromflusses innerhalb eines geschlossenen Systems werden durch die Spannungsquelle Elektronen von der einen Leitung zur anderen befördert, deren Rückfluß durch den Widerstand mehr oder weniger stark behindert wird.

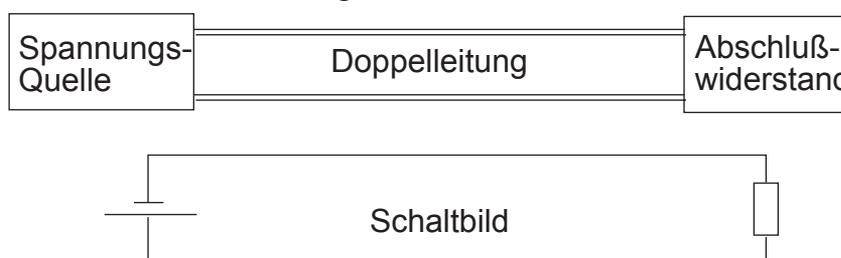


Abb.: 2.1. Elektrische Doppelleitung und Schaltbild

1. Eine Dokumentation dieses Simulationsprogramms findet sich unter <http://www.astrophysik.uni-kiel.de/~hhaertel>

Wie bei der mechanischen Gasleitung werden bei der elektrischen Doppelleitung die folgenden Annahmen gemacht:

- Die beiden Einzelleitungen des in sich geschlossenen Stromkreises verlaufen parallel zueinander,
- Ihr Durchmesser und Abstand ist gering im Vergleich zu ihrer Längenausdehnung.

Diese Annahmen führen zu folgenden Vereinfachungen:

- Alle Veränderungen senkrecht zur Längenausbreitung können vernachlässigt werden
- Aus Gründen der Symmetrie verhalten sich beide Leitungen hinsichtlich Spannung und Stromstärke bis auf das Vorzeichen gleichartig.
- Die in einer solchen linearen Doppelleitung auftretenden Ausbreitungsvorgänge lassen sich auf Grund einer von dem Physiker Maxwell im 19. Jahrhundert entwickelten Theorie exakt berechnen.

Diese Maxwellsche Theorie liegt dem Simulationsprogramm TL zugrunde, das für diesen Kurs verwendet wird.

### 2.2.2. Ausbreitungsgeschwindigkeit

In einem Gas oder einer Flüssigkeit wurden unterschiedliche Dichteverteilungen durch Zusammenstöße der Moleküle ausgeglichen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle konnte somit nicht größer sein als die thermische Geschwindigkeit der stoßenden Moleküle. Zur Erinnerung: die thermische Geschwindigkeit von Luftmolekülen bei Zimmertemperatur und Normaldruck beträgt etwa 450 m/s.

Im elektrischen Fall hängt die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle nicht mit der Bewegung von Ladungsträgern zusammen. Ladungsträger sind im Gegensatz zu neutralen Molekülen von einem elektrischen Feld umgeben. Änderungen in der Verteilung von Ladungsträgern ergeben Änderungen im elektrischen Feld und diese Änderungen pflanzen sich mit Lichtgeschwindigkeit fort. Diese beträgt 300.000km/s.

Auf einer elektrischen Doppelleitung breiten sich Spannungs- und Strompulse demnach mit einer Geschwindigkeit aus, die in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit liegt.

Trotz dieser um viele Größenordnungen verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeiten gelten für eine elektrische Doppelleitung jedoch analoge Ausbreitungsgesetze wie bei einer mechanischen Leitung. Diese Vorgänge werden im nächsten Kapitel ausführlich dargestellt.

### 2.2.3. Spannungs- und Strompulse auf einer Doppelleitung

#### Spannungspuls

Betrachtet man eine elektrische Doppelleitung mit einem Abschlußwiderstand, so sind im neutralen Zustand die freie Elektronen auf den Leitern gleichmäßig verteilt. Befindet sich an einer bestimmten Stelle ein Spannungspuls, so bedeutet dies, dass an dieser Stelle auf der Oberfläche des einen Leiters zusätzliche, freie Elektronen vorhanden sind, die auf dem gegenüber liegenden Leiterstück fehlen.<sup>1</sup>

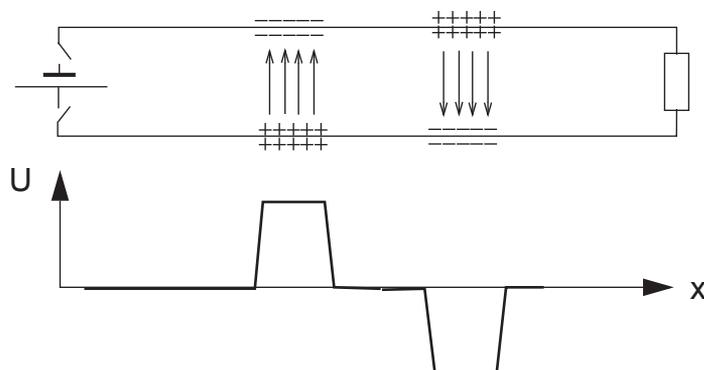


Abb.: 2.2. Zwei Spannungspulse mit entgegengesetzter Polarität auf einer Doppelleitung

## Strompuls

Die folgende Abbildung zeigt eine Situation, die auf den ersten Blick nur schwer zu realisieren ist. In einem bestimmten Augenblick ( $t = 0$ ) sollen alle freien Elektronen innerhalb einer schmalen Zonen eine Driftgeschwindigkeit in eine bestimmte Richtung erhalten (und in die entgegengesetzte Richtung auf der gegenüber liegenden Leitung), jedoch ohne Auftreten einer Spannung.

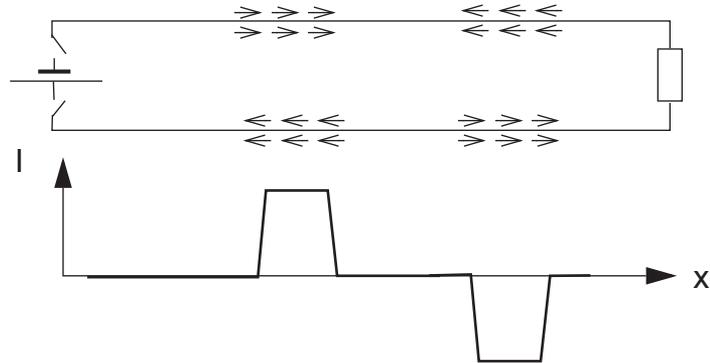


Abb.: 2.3. Zonen mit driftenden Elektronen auf einer Doppelleitung

Später wird sich zeigen, dass solche Zonen innerhalb normaler Reflexionsvorgänge auftreten können.

### 2.2.4. Ausbreitung eines Spannungspulses auf einer Doppelleitung

In der folgenden Simulation ist eine Doppelleitung mit einer Zone erhöhter Spannung dargestellt, in der aber kein Strom fließt.

Dies bedeutet, dass sich zusätzliche Elektronen auf dem einen Leiterabschnitt befinden, die auf der Oberfläche des gegenüberliegenden Leiterabschnitts fehlen. Letzteres ist gleichbedeutend mit der Anwesenheit von positiven Ladungen auf der Oberfläche.

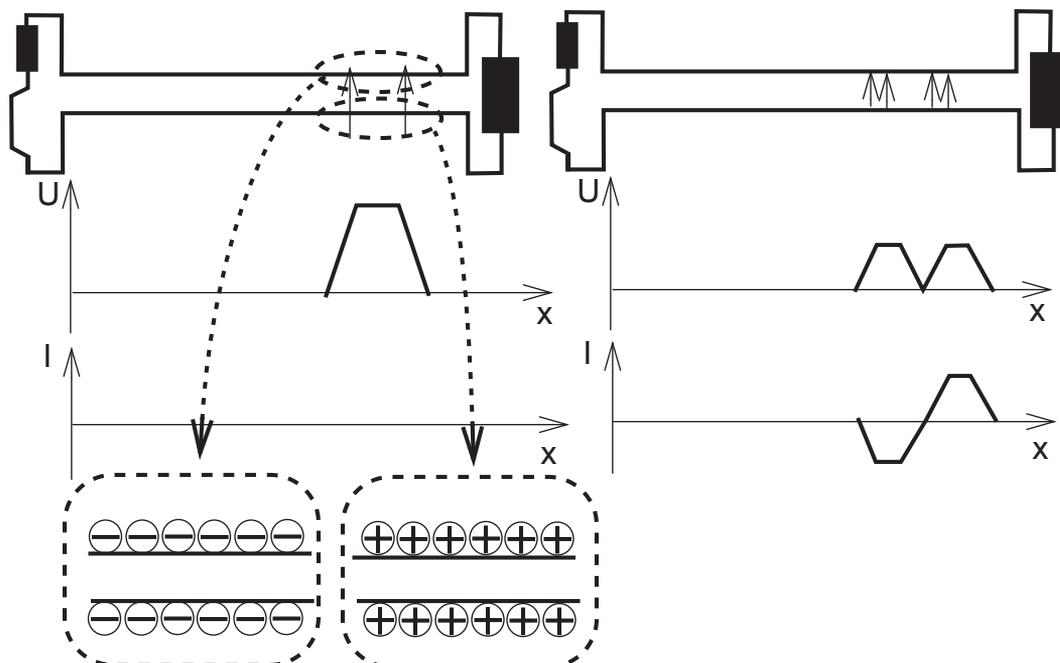


Abb.: 2.4. Ausbreitung einer Zone mit zusätzlichen Oberflächenladungen  
Links: Ausgangsposition; Rechts: Ausbreitung nach einigen Zeitschritten.

1. Bei einem metallischen Leiter können sich zusätzliche Ladungen nur auf der Oberflächen aufhalten. Das Innere eines Metalls ist immer neutral.

Die negativen Oberflächenladungen stoßen sich sowie auch alle freien Elektronen im Innern des Leiters nach beiden Seiten hin ab und erzeugen damit eine Driftbewegung nach beiden Seiten. Die positiven Ladungen ziehen die freien Elektronen im Innern des Leiters von beiden Seiten her an und erzeugen damit ebenfalls eine Driftbewegung nach beiden Seiten. Im Ergebnis wird die Dichte der Oberflächenladungen in der Ausgangszone reduziert, während die Dichte der benachbarten, auseinander driftenden Zonen erhöht wird.

Lässt man die Simulation schrittweise ablaufen, so erkennt man analog zum mechanischen Fall, dass sich die Ausgangszone in zwei Pulse oder Wellenberge aufteilt, die mit entgegengesetzter Orientierung auseinanderlaufen.

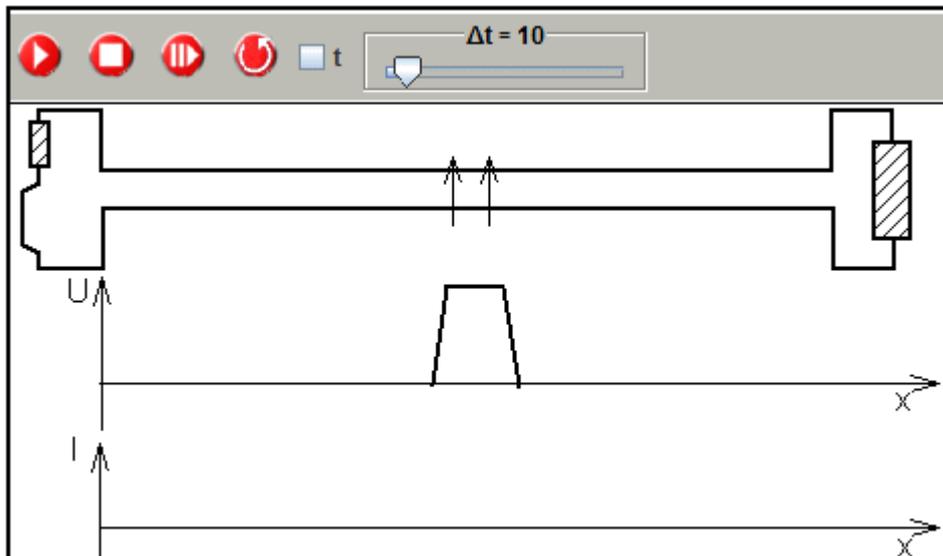


Abb.: 2.5. Simulation einer Zone erhöhter Spannung auf einer Doppelleitung

### 2.2.5. Ausbreitung einer Zone mit driftenden Elektronen

Die folgende Abbildung zeigt auf einer Doppelleitung eine schmale Zone ohne Spannung, innerhalb derer die freien Elektronen in einem bestimmten Augenblick ( $t=t_0$ ) anfangen, in eine bestimmte Richtung zu driften.

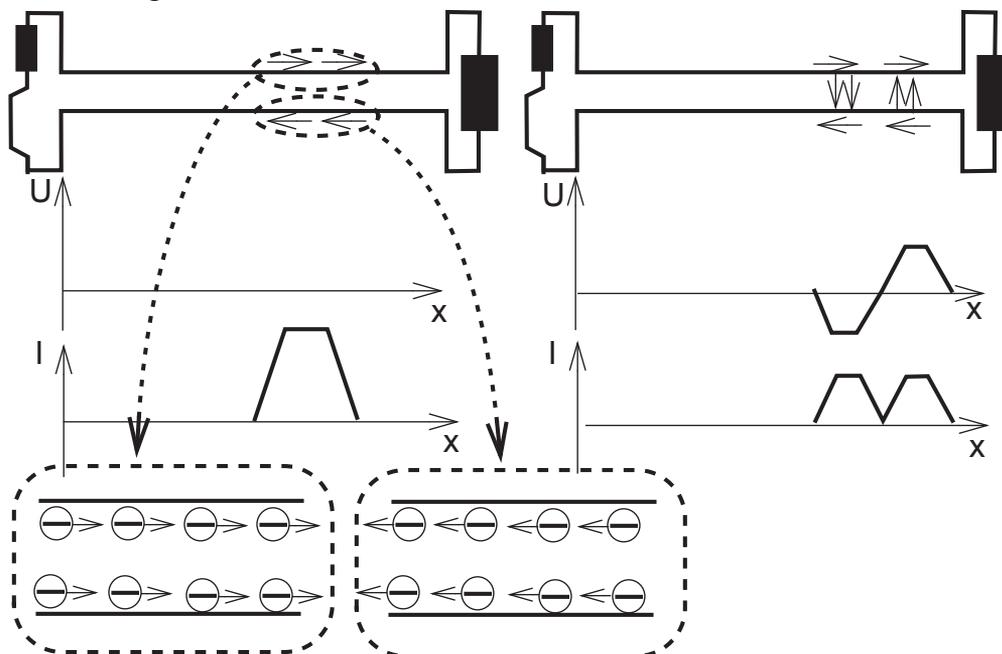


Abb.: 2.6. Ausbreitung einer Zone mit driftenden Elektronen auf einer Doppelleitung  
Links: Ausgangsposition; Rechts: Ausbreitung nach einigen Zeitschritten

Durch Wechselwirkung mit den nicht driftenden Elektronen in Richtung der Driftbewegung entsteht zum einen eine Verdichtung und damit negative Oberflächenladungen, zum anderen eine Driftbewegung der vorher noch nicht driftenden Elektronen mit gleicher Orientierung wie die ursprüngliche Driftbewegung.

In der entgegengesetzten Richtung zur Driftbewegung entsteht eine Verringerung der Elektronendichte, die sich als positive Oberflächenladung bemerkbar macht. Die freien Elektronen in dieser benachbarten Zonen erfahren eine verringerte Wechselwirkung auf der Seite der driftenden Elektronen und beginnen, in die gleiche Richtung zu driften.

Die Simulation bietet die Möglichkeit, diesen Vorgang im einzelnen zu verfolgen..

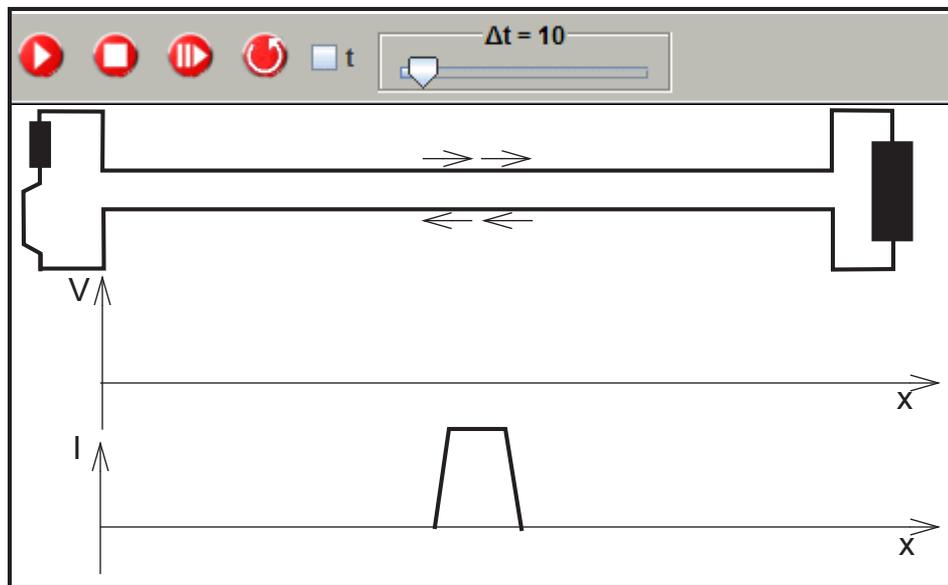


Abb.: 2.7. Simulation einer Zone mit driftenden freien Elektronen auf einer Doppelleitung

Es ist ratsam, die Simulation mit Hilfe der Schritttaste zu aktivieren, nicht mit der Starttaste.

### 2.2.6. Ausbreitung eines Spannungs-Strompulses auf einer Doppelleitung

In der folgenden Simulation ist der realistische Fall eines Spannungs-Strompulses auf einer Doppelleitung dargestellt. Innerhalb einer schmalen Zone besteht zwischen den Leitern eine Spannung  $U$  und es ist ein elektrischer Strom  $I$  vorhanden, d.h. die freien Elektronen driften innerhalb der einander gegenüber liegenden Leitern mit jeweils entgegengesetzter Orientie-

ung. Solche Pulse sind die Grundlage der digitalen Datenübermittlung.

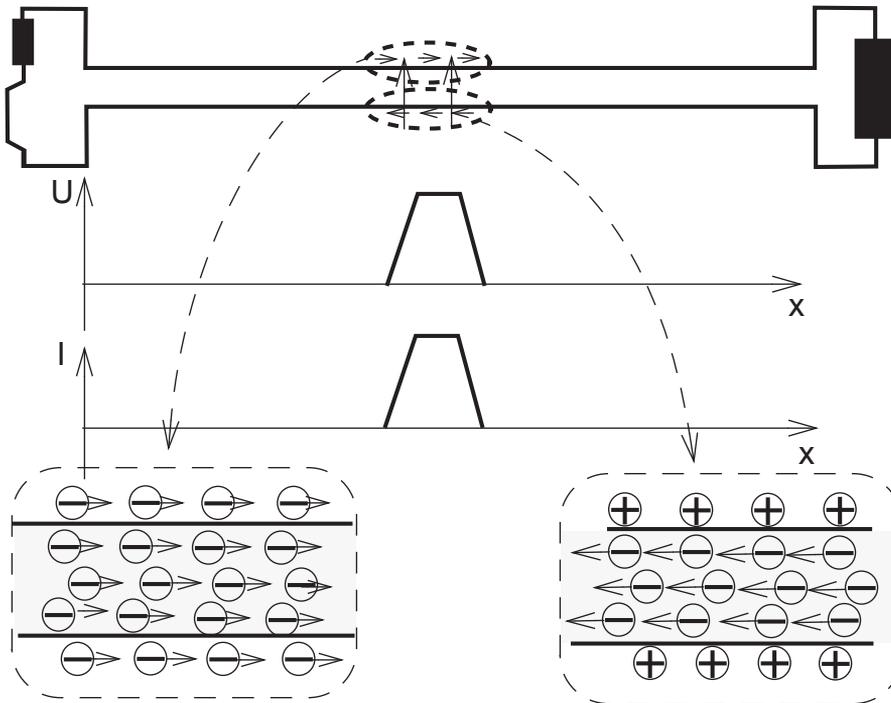


Abb.: 2.8. Mikroskopische Darstellung eines Pulses auf einer Doppelleitung

Analog zum mechanischen Fall lässt sich zeigen, dass sich auch hier die Verschiebung eines Pulses beschreiben lässt als Überlagerung seiner beiden Komponenten, die sich jeweils nach beiden Seiten hin ausbreiten.

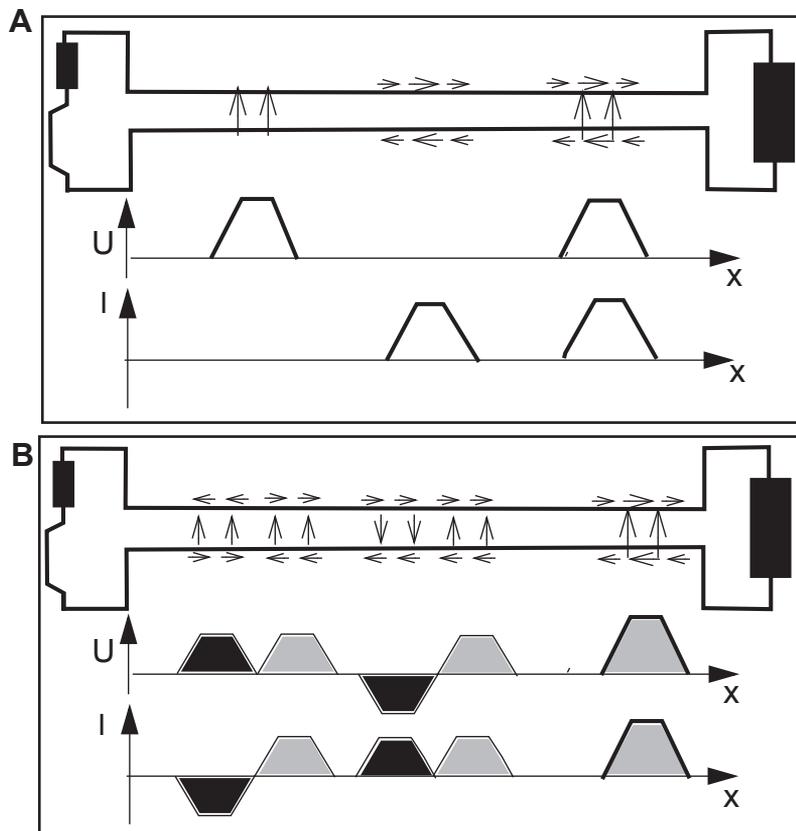


Abb.: 2.9. Ausbreitung eines Pulses und seiner Komponenten auf einer Doppelleitung  
A: Ausgangsposition; B: Ausbreitung nach einigen Zeitschritten

Wie graphisch angedeutet heben sich bei einem bestimmten Verhältnis von  $U/I$  die Verschiebungen entgegen der Stromrichtung gegenseitig auf und addieren sich in Stromrichtung. Das Ergebnis ist eine einfache Verschiebung des Ausgangspulses in Stromrichtung. Die Simulation bietet die Möglichkeit, diesen Vorgang im einzelnen zu verfolgen.

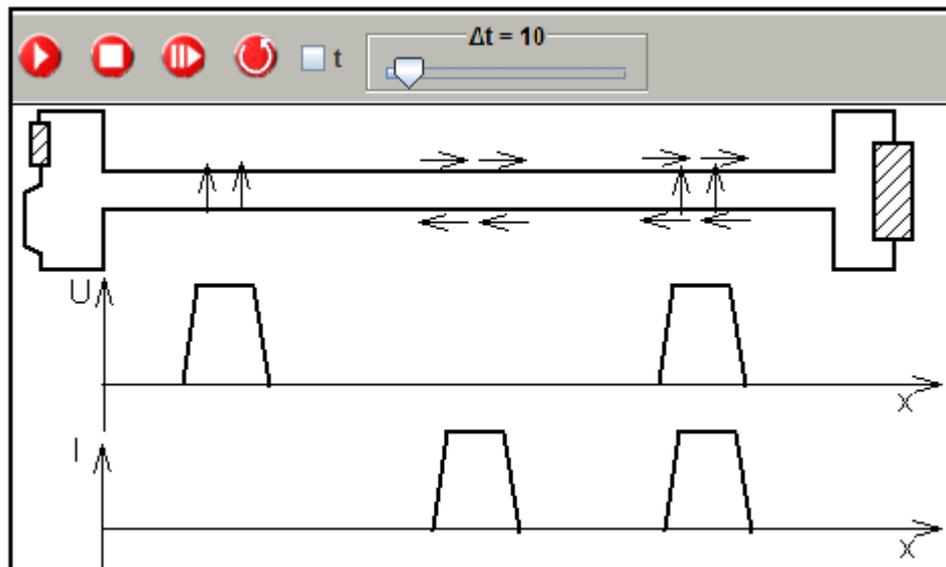


Abb.: 2.10. Simulation der Ausbreitung eines Pulses und seiner Komponenten

### 2.2.7. Ausbreitung eines Pulses mit verändertem Verhältnis $U/I$

In der folgenden Abbildung ist ein Puls auf einer Doppelleitung zusammen mit seinen beiden Komponenten an getrennten Orten dargestellt. Im Vergleich mit den vorherigen Situationen wurde das Verhältnis  $U/I$  verändert.

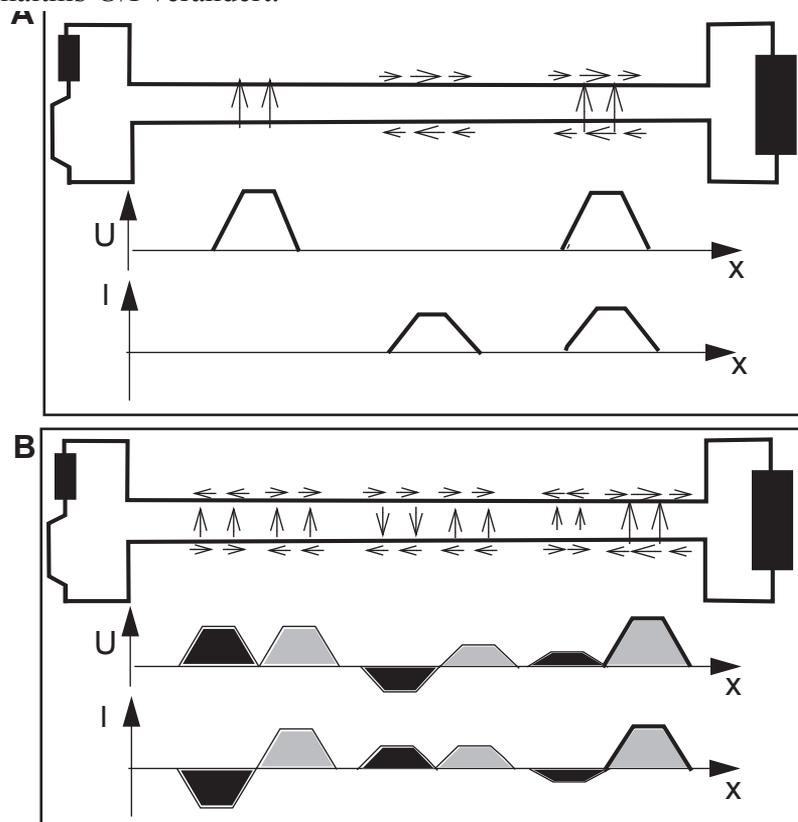


Abb.: 2.11. Ausbreitung eines Pulses mit geänderten Verhältnis  $U/I$  und seiner Komponenten auf einer Doppelleitung  
A: Ausgangsposition; B: Ausbreitung nach einigen Zeitschritten

Auf Grund des nicht abgestimmten Verhältnisses von  $U/I$  heben sich die Ausbreitungen entgegengesetzt zur Stromrichtung nicht mehr völlig gegenseitig auf.

Es ergibt sich keine reine Verschiebung des Pulses, sondern eine Aufspaltung in zwei Pulse, die sich auseinander bewegen.

Die Simulation bietet die Möglichkeit, diesen Vorgang im einzelnen zu verfolgen.

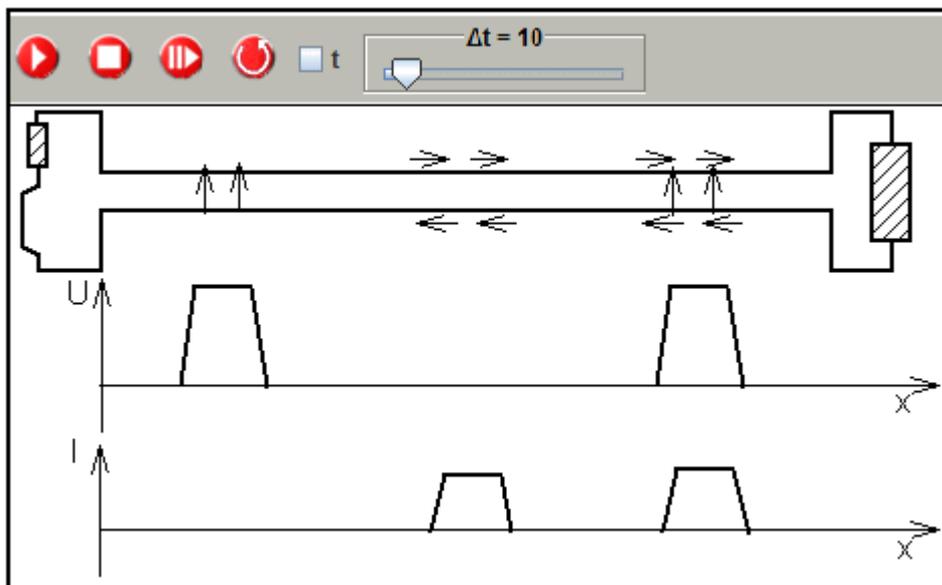


Abb.: 2.12. Simulation eines Pulses und seiner Komponenten mit einem nicht abgestimmten Verhältnis von  $U/I$

## 2.3. Reflexion an einem Widerstand

### 2.3.1. Reflexion an einer offenen Doppelleitung ( $R = \infty$ )

In Analogie zu einem mechanischen System kann man bei einer elektrischen Doppelleitung eine Reflexion erwarten, wenn ein Puls oder eine Wellenfront auf einen Abschlußwiderstand trifft.

Sind die beiden Leitungen an ihren Enden unterbrochen, so entspricht dies einem Abschlußwiderstand  $R = \infty$

Die folgende Animation zeigt eine solche Doppelleitung mit einem Puls kurz vor dem Auftreffen und im Augenblick der Reflexion.

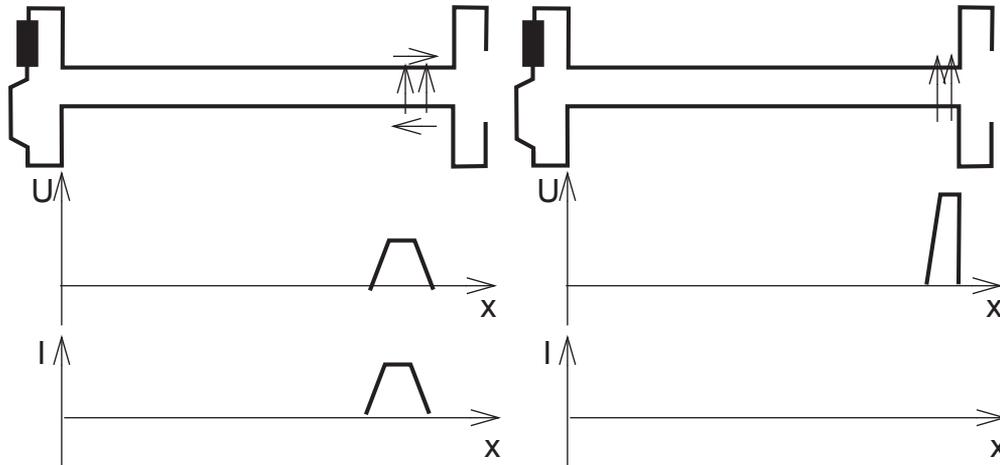


Abb. 3.1. Links: Ein Puls kurz vor dem Auftreffen auf eine Unterbrechung ( $R=\infty$ )

Rechts: Strom/Spannungsverhältnisse im Augenblick der Reflexion

Bedingt durch die Unterbrechung der Leitungen wird der Strom gestoppt, während sich die Spannung erhöht. Ist dem Augenblick, in dem die Stromstärke auf Null gesunken ist, erreicht die Spannung ein Maximum.

Wie in dem Kapitel "2.2.4. Ausbreitung eines Spannungspulses auf einer Doppelleitung" gezeigt wurde, breitet sich ein solcher Spannungspuls nach beiden Seiten hin aus.

Die Ausbreitung nach rechts ist jedoch wegen der Leitungsunterbrechung nicht möglich. Dieser Anteil wird deshalb ebenfalls nach links reflektiert und mit der nach links sich ausbreitenden Hälfte überlagert. Als Ergebnis ergibt sich eine Reflexion des ursprünglichen Pulses ohne Änderung der Form.

Mit Hilfe der Simulation kann dieser Vorgang im einzelnen verfolgt werden.

### 2.3.2. Reflexion an einem Kurzschluß als Abschlußwiderstand

Sind die beiden Enden einer Doppelleitung kurzgeschlossen, so entspricht dies einem Abschlußwiderstand von 0 Ohm.

Die folgende Abbildung zeigt eine solche Doppelleitung mit einem Puls kurz vor dem Auftreffen und im Augenblick der Reflexion.

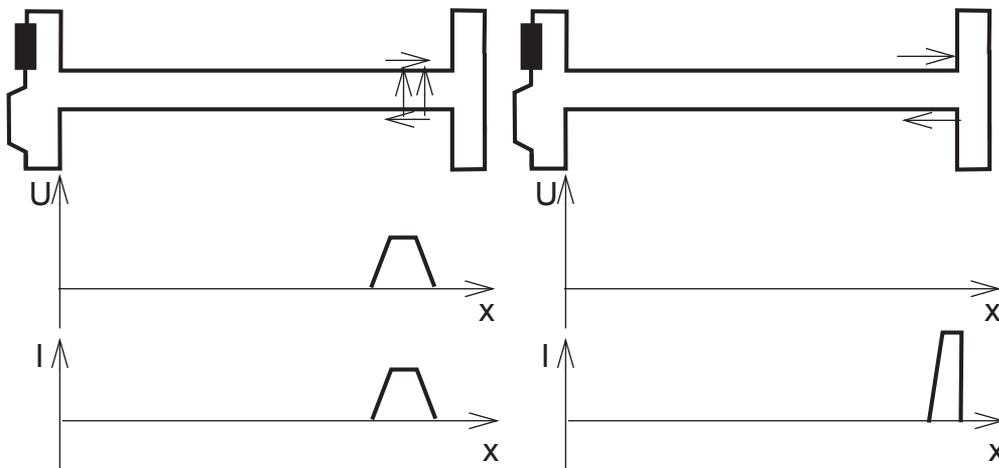


Abb.: 3.2. Links: Ein Puls kurz vor dem Auftreffen auf einen Kurzschluß ( $R=0 \Omega$ )  
Rechts: Strom/Spannungsverhältnisse im Augenblick der Reflexion

An der Verbindungsstelle beider Leitungen nähern sich die unterschiedlich gepolten Oberflächenladungen auf den beiden Leitungen gegenseitig an und neutralisieren sich. Während der Annäherung vergrößert sich ihre gegenseitige Coulomb-Wechselwirkung mit dem Ergebnis einer beschleunigenden Wirkung auf die driftenden Elektronen.

Sind alle Oberflächenladungen neutralisiert, so existiert an der Kurzschlußstelle eine Zone driftender Elektronen ohne Spannung zwischen den Leitern.

Diese Situation und der dann einsetzende Vorgang entspricht dem Sachverhalt, der in dem Kapitel "2.2.5. Ausbreitung einer Zone mit driftenden Elektronen auf einer Doppelleitung" dargestellt wurde.

Eine solche Zone breitet sich normaler Weise nach beiden Seiten hin aus. Am Ende einer kurzgeschlossenen Doppelleitung bedeutet dies jedoch, dass die beiden Pulshälften auf den getrennt Leitungen zurücklaufen.

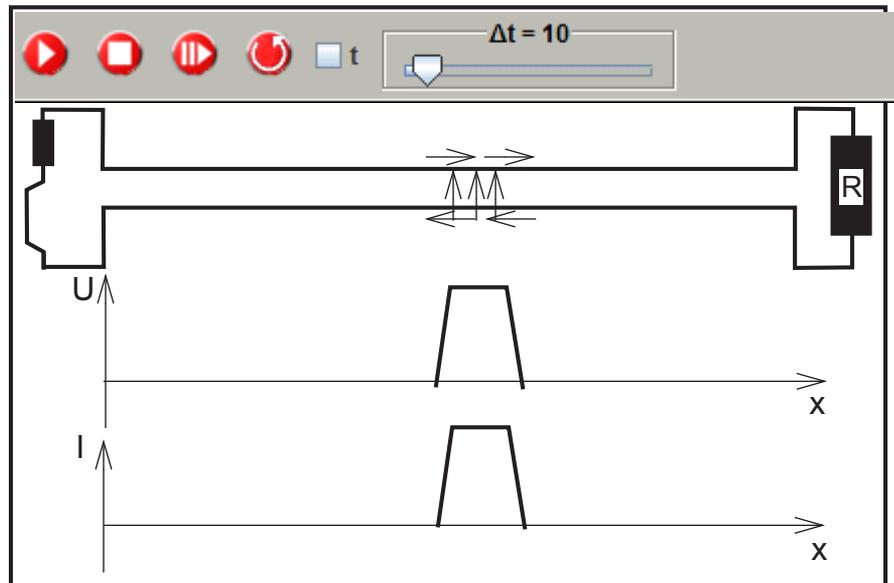
Mit Hilfe der Simulation kann dieser Vorgang im einzelnen verfolgt werden.

### 2.3.3. Reflexionsfreier Abschluß einer Doppelleitung

Im Fall einer mechanischen Doppelleitung gibt es den Fall, dass der Abschlußwiderstand das Verhältnis  $\Delta P/I$  beim Auftreffen eines Pulses nicht verändert. Unter dieser Bedingung tritt keine Reflexion auf.

Es liegt nahe anzunehmen, dass ein solcher reflexionsfreier Abschluß auch bei einer elektrischen Doppelleitung auftritt, bei der der Abschlußwiderstand das Verhältnis  $U/I$  nicht verändert.

Die Simulation bietet die Möglichkeit, die Reflexion für unterschiedliche Widerstandswerte zu verfolgen und festzustellen, bei welchem Wert keine Reflexion auftritt.



Setze  $R=20; =30; =40; =50; =60; =70; =80$  Einheiten

Abb.: 3.3. Simulation der Reflexion eines Pulses auf einer Doppelleitung mit verschiedenen Abschlußwiderständen

Das Verhältnis  $U/I$ , das notwendig ist, damit eine lineare Pulsübertragung möglich ist, wird durch eine besondere Eigenschaft der entsprechenden Doppelleitung bestimmt, die als "Wellenwiderstand" oder "Impedanz" (abgekürzt  $Z$ ) bezeichnet wird. Die Einheit, in der  $Z$  gemessen wird, ist Ohm ( $\Omega$ ).

Das Verhältnis  $U/I$  entspricht dem Wert eines Widerstandes und bestimmt, bei welcher Spannung welcher Strom durch den Widerstand fließt.

Somit liegt es nahe zu vermuten, dass ein reflexionsfreier Abschluß gegeben ist, wenn bei einer Doppelleitung mit dem Wellenwiderstand  $Z_1$  und einem Abschlußwiderstand  $R_1$  ist Bedingung gilt:  $Z_1 = R_1$ .

Theorie und Simulation bestätigen diese Vermutung.

In allen anderen Fällen ( $R < Z$  oder  $R > Z$ ) tritt eine partielle Reflexion auf.

Es ist sicherlich lehrreich, diese Fälle in der gleichen Weise zu analysieren, wie dies für  $R=0$  and  $R = \infty$  durchgeführt wurde.



## 2.4. Wellenwiderstand / Impedanz

### 2.4.1. Bestimmungsgrößen für den Wellenwiderstand

Auf einer Doppelleitung verschiebt sich ein Puls oder eine Wellenfront mit einer bestimmten Orientierung, wenn die Spannung  $U$  und die Stromstärke  $I$  in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Dies Verhältnis wird Wellenwiderstand oder Impedanz genannt und mit  $Z$  gekennzeichnet.

Zwei Größen einer Doppelleitung - die Kapazität und die Induktivität - sind bestimmend für den Wellenwiderstand  $Z$ . Die Bedeutung dieser beiden Größen und ihr Einfluß auf den Wellenwiderstand werden im folgenden Abschnitt behandelt.

### 2.4.2. Kapazität einer Doppelleitung

Wie im Kapitel "2.2. Ausbreitungsvorgänge auf einer Doppelleitung" beschrieben wurde, entsteht ein Spannungspuls auf einer Leitung durch eine bestimmte Anzahl zusätzlicher Ladungsträger auf den Leiteroberflächen gegenüberliegender Abschnitte.

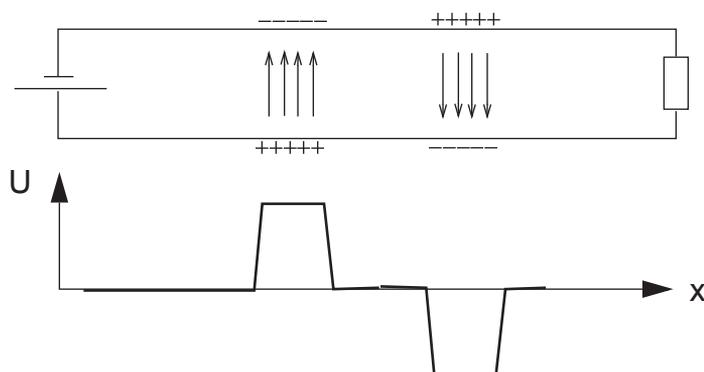


Abb.: 4.1. Spannungspuls und Oberflächenladungen auf einer Doppelleitung

Die Kapazität  $C$  einer Leitung steht in einem direkten Zusammenhang mit der Dichte der Oberflächenladung, die für eine vorgegebenen Spannung erforderlich ist. Je größer die Kapazität einer Leitung, desto größer ist die erforderliche Dichte an Oberflächenladungen, um eine vorgegebenen Spannung zwischen den Leitungen zu erreichen.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Dichte der Oberflächenladung bei vorgegebener Spannung und damit die Kapazität zu verändern. Man kann entweder den Abstand der beiden Leitungen verändern oder zwischen die beiden Leitungen ein isolierendes Material, ein sog. Dielektrikum, einbringen. Die Auswirkungen dieser beiden Möglichkeiten sind gleich: es verändert sich die Kapazität der Leitung, d. h. die Dichte der Oberflächenladungen bei gleicher Spannung.

### 2.4.3. Induktivität einer Doppelleitung

Im Fall einer Gasströmung erscheint es plausibel, dass Gase mit unterschiedlich träger Masse einen unterschiedlichen Antrieb erfordern. Ein Gas wie Wasserstoff, dessen Moleküle achtmal leichter sind als Sauerstoffmoleküle, wird sich bei gleicher Druckdifferenz entsprechend leichter in Bewegung setzen als Sauerstoff und läßt sich auch entsprechend leichter abstoppen.

Bei einer Änderung des elektrischen Stromes, d.h. bei beschleunigten Elektronen, gibt es ebenfalls einen Trägheitseffekt, allerdings hat dieser nichts mit der trägen Masse der beweglichen Elektronen zu tun. Diese Masse ist bei allen Elektronen stets gleich - es gibt keine Wasserstoff-Elektronen oder Sauerstoff-Elektronen - und sie ist außerdem so klein, dass dadurch bedingte Effekte vernachlässigt werden können.

Elektronen sind von einem elektrischen Feld umgeben und bei einer Beschleunigung tritt eine gegenseitige Behinderung auf. Je mehr Elektronen sich gleichzeitig in Bewegung setzen oder ihre Driftgeschwindigkeit ändern und je näher sie sich sind, um so mehr behindern sie sich. Es handelt sich hier um einen grundlegenden, rein elektrischen Effekt, der mit mechanischen Vorstellungen nicht zu erklären ist. Für ein weitergehendes Studium muß auf Lehrbücher mit den entsprechenden Kapiteln zum Thema "Elektromagnetische Induktion" verwiesen werden.

Für die weiteren Ausführungen reicht es aus zu wissen, dass es auf einer Doppelleitung eine Art Trägheit der Elektronen gibt, die sich immer dann bemerkbar macht, wenn die Driftgeschwindigkeit der Elektronen geändert werden soll, das heißt, wenn sich die Stromstärke ändert.

Diese trägheitsartigen Eigenschaft einer Doppelleitung nennt man Induktivität und kennzeichnet sie mit  $L$ . Wie bei der Kapazität läßt sich  $L$  ebenfalls durch die Änderung des Abstandes der Leitungen beeinflussen sowie durch Einbringen von Materialien mit speziellen magnetischen Eigenschaften.

Ein physikalisches Verständnis dieser Effekte ist nicht mit kurzen Erklärungen zu erreichen, sondern setzt gründliche Kenntnisse zum Thema "Elektromagnetische Induktion" voraus.

#### **2.4.4. Mathematische Beziehung zwischen $Z$ , $L$ und $C$**

##### **Qualitative Beschreibung**

Wird die Induktivität  $L$  einer Doppelleitung vergrößert, so wird bei vorgegebener Spannung wegen der verstärkten gegenseitigen Behinderung der Elektronen ein kleinerer Strom fließen. Somit gilt: Je größer bzw. kleiner die Induktivität einer Doppelleitung, desto größer bzw. kleiner ist die Impedanz  $Z = U/I$ .

Wird die Kapazität einer Doppelleitung vergrößert, so sind zusätzliche Elektronen erforderlich, um eine vorgegebene Spannung aufrecht zu erhalten. Damit wird der Strom im Verhältnis zur Spannung vergrößert und es gilt: Je größer bzw. kleiner die Kapazität einer Doppelleitung, desto kleiner bzw. größer ist die Impedanz  $Z = U/I$ .

##### **Quantitative Beschreibung**

Aus der Theorie abgeleitet und experimentell bestätigt ergibt sich für die Impedanz einer Wellenleitung die folgende Beziehung:  $Z = \sqrt{L/C}$

Wird  $L$  in Henry gemessen und  $C$  in Farad, so erhält man für  $Z$  die Einheit Ohm.

Für den Wellenwiderstand  $Z$  einer Doppelleitung ist es somit ohne Bedeutung, ob beispielsweise die Kapazität verdoppelt oder die Induktivität halbiert wird. Die Auswirkungen auf den Wellenwiderstand sind gleich. Der Wellenwiderstand bleibt auch unverändert, wenn sowohl die Kapazität als auch die Induktivität um den gleichen Faktor verändert werden.

Sowohl  $L$  als auch  $C$  hängen vom Abstand der beiden Leitungen ab. Sollen also  $L$  und  $C$  unabhängig voneinander geändert werden, so ist dies nur durch das Einbringen entsprechender Materialien möglich (Dielektrikum zur Änderung von  $C$ , magnetische Materialien zur Änderung von  $L$ )

#### **2.4.5. Doppelleitung mit veränderbaren Werten für die Kapazität**

Das Simulationsprogramm TL bietet die Möglichkeit, den Wert der Kapazität  $C$  für die gesamte Leitung zu verändern und zwar ohne Änderung von  $L$ . Experimentell wird dies durch das Einbringen unterschiedlicher Dielektrika erreicht.

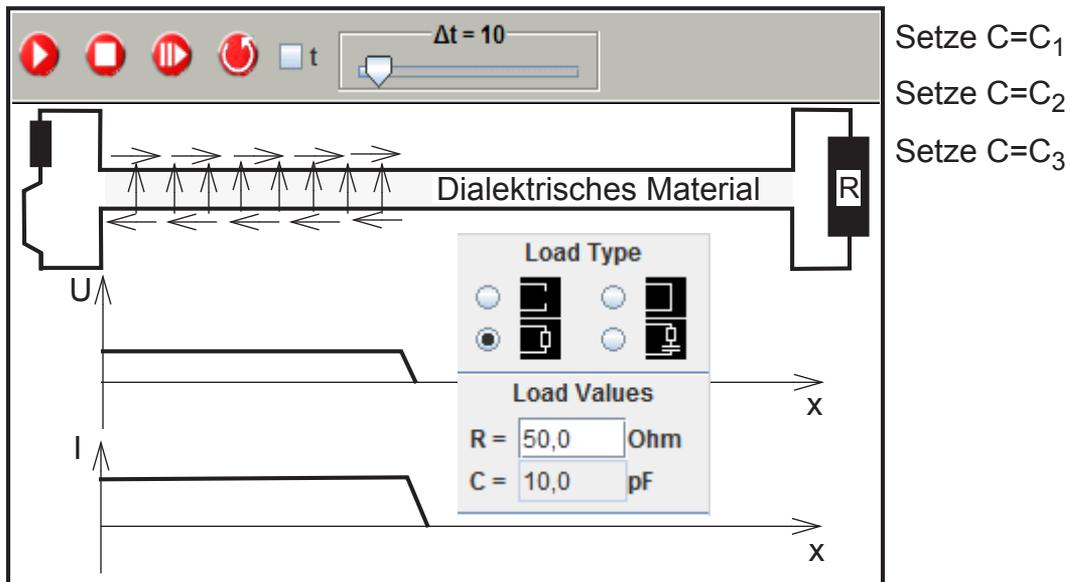


Abb.: 4.2. Wellenfront auf einer Doppelleitung mit variabler Kapazität

Nach Start der Simulation läuft eine Wellenfront über die Leitung, bei der das Verhältnis  $Z = U/I$  mit der Größe von  $C$  variiert. Den zu der jeweiligen Kapazität zugehörige Wert für  $Z$  erhält man durch Bestimmung des Abschlußwiderstandes  $R$ , bei dem keine Reflexion auftritt. Der Wert für  $R$  kann in dem geöffneten Eingabefenster variiert werden.

#### 2.4.6. Doppelleitung mit veränderbaren Werten für die Induktivität

Das Simulationsprogramm TL bietet die Möglichkeit, den Wert für die Induktivität  $L$  bei konstantem  $C$  längs der gesamten Leitung zu verändern. Experimentell wird dies durch das Einbringen unterschiedlicher magnetischer Materialien erreicht.

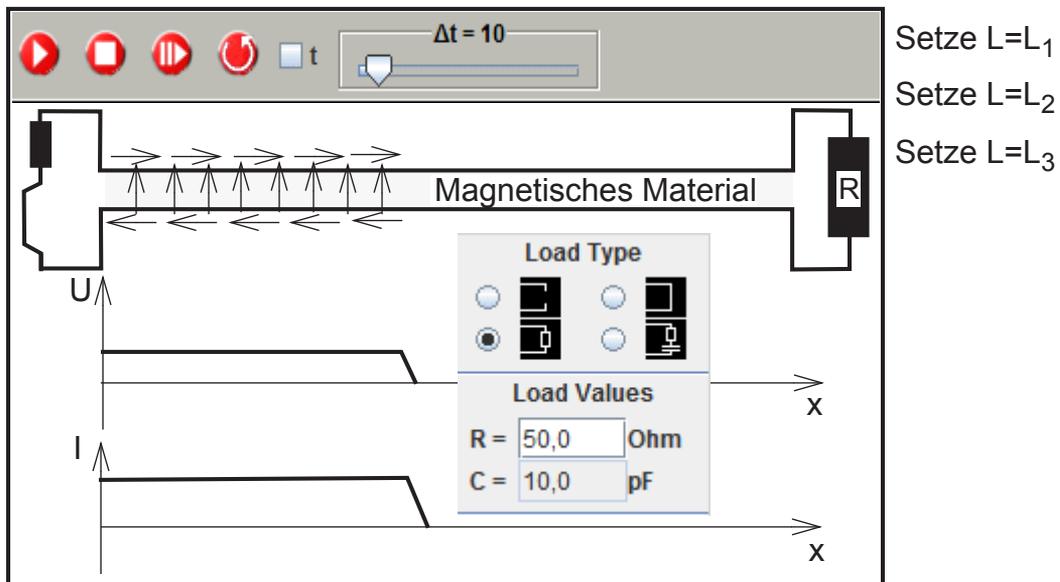


Abb.: 4.3. Wellenfront auf einer Doppelleitung mit variabler Induktivität

Nach Start der Simulation läuft eine Wellenfront über die Leitung, bei der das Verhältnis  $Z = U/I$  mit der Größe von  $L$  variiert. Den zu der jeweiligen Induktivität zugehörige Wert für  $Z$  erhält man durch Bestimmung des Abschlußwiderstandes  $R$ , bei dem keine Reflexion auftritt. Der Wert für  $R$  kann in dem geöffneten Eingabefenster variiert werden.



## 2.5. Reale Leitungen mit Verlustanteilen

### 2.5.1. Spannungsquelle mit Innenwiderstand

Jede Spannungsquelle besitzt neben der Eigenschaft, eine Spannung erzeugen zu können, auch einen eigenen Widerstand, der auch als Innenwiderstand bezeichnet wird.

Als Ersatzschaltbild für eine solche Spannungsquelle zeichnet man deshalb eine Spannungsquelle und einen Widerstand in Reihe.

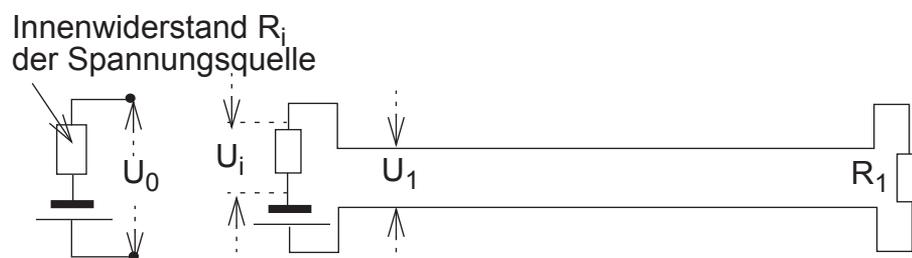


Abb.:5.1. Doppelleitung mit Gleichstromquelle und mit Innerwiderstand

Solange kein Strom fließt, mißt man zwischen den Ausgängen einer Spannungsquelle die sog. Leerlaufspannung  $U_0$ .

Bei Stromfluß fällt an dem Innenwiderstand  $R_i$  der Spannungsquelle eine Spannung ab, so dass nach außen nicht  $U_0$ , sondern nur ein entsprechend verringerter Wert  $U_1$  zur Verfügung steht.

In der folgenden Simulation kann der Innenwiderstand  $R_i$  variiert werden, um dessen Auswirkung hinsichtlich Spannung und Stromstärke auf der Doppelleitung zu untersuchen.

Ergebnis:

Je größer der Innenwiderstand, desto kleiner der Spannungsanteil, der an der Doppelleitung anliegt, desto kleiner auch die Stromstärke und umgekehrt.

### 2.5.2. Doppelleitung mit konstantem Leitungswiderstand

Bei allen bisher vorgegebenen Simulationen wurde stets vorausgesetzt, dass auf der Doppelleitung keine Verluste auftreten. Dies ist eine Idealisierung, die in der Praxis nur bei relativ kurzen Leitungen annäherungsweise erfüllt ist. Bei längeren Leitungen machen sich Verluste in aller Regel deutlich bemerkbar.

Solche Verluste sollen im folgenden näher betrachtet werden. Dabei wird angenommen, dass beide Leitungen einen gleichmäßigen Widerstand  $R_L$  aufweisen. Pro Längeneinheit ist somit eine bestimmte Spannung notwendig, um einen bestimmten Strom fließen zu lassen.

Die folgende Simulation bietet die Möglichkeit, den Leitungswiderstand zu variieren, um seinen Einfluß auf den Spannungs und Stromverlauf zu untersuchen.

### 2.5.3. Doppelleitung mit einer gleichmäßigen Leitfähigkeit zwischen den Leitungen (Leckwiderstand)

Das Simulationsprogramm TL bietet die Möglichkeit, über der ganzen Länge der Doppelleitung einen parallelen, sogenannten Leckwiderstand zu simulieren, dessen Wert einstellbar ist. Die Leitungen werden dadurch auf der ganzen Länge über einen gleichmäßigen Widerstand verbunden.

In der Realität ist dieser sog. Leckwiderstand sehr gering und kann in vielen Fällen vernachlässigt werden. Er ist jedoch prinzipiell immer vorhanden.

Seine Auswirkung auf den Verlauf von Spannung und Stromstärke kann mit Hilfe der folgenden Simulation untersucht werden.

### 2.5.4. Einzelwiderstand auf einer Doppelleitung

Das Simulationsprogramm TL erlaubt es, auf beiden Leitungen in der Mitte zwischen Spannungsquelle und Abschlußwiderstand je einen variablen Widerstand zu setzen. Dadurch entsteht zusammen mit dem Abschlußwiderstand eine Reihenschaltung.

Durch diese Widerstände ändert sich das Verhältnis  $U/I$  und somit wird ein Teil einer eintreffenden Wellenfront reflektiert.

Erst nachdem diese Reflektionen abgeklungen sind, stellt sich ein Fließgleichgewicht ein, für das das Ohmsche Gesetz gilt.

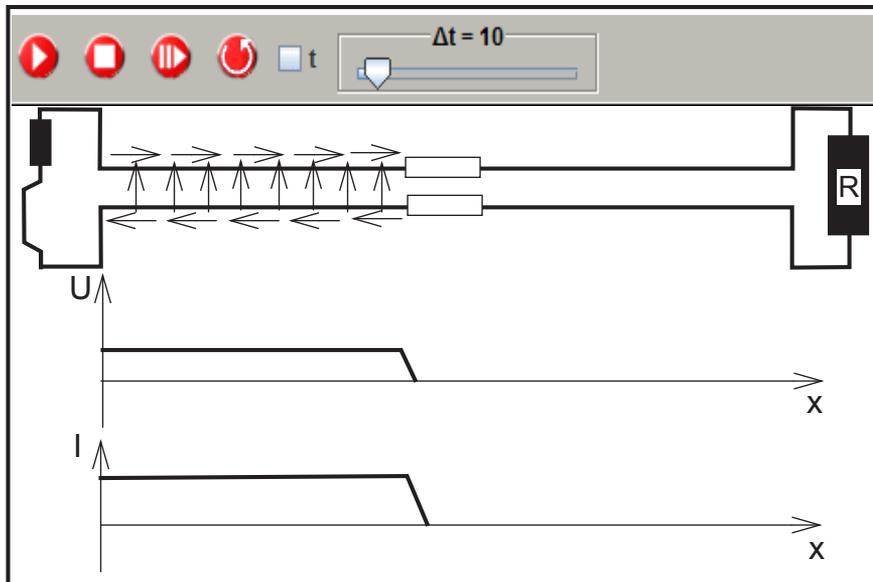


Abb.: 5.2. Doppelleitung mit zusätzlichen Widerständen in Reihe mit dem Abschlusswiderstand

Solche Übergangsprozesse finden immer statt, wenn sich in einem Stromkreis irgend welche Bedingungen ändern, sei es dass die Spannungsquelle eingeschaltet wird oder sich die Leitungs- oder Abschlusswiderstände ändern.

Wegen der hohen Ausbreitungsgeschwindigkeit sind die Vorgänge sehr kurz und werden im allgemeinen nicht bemerkt.

### 2.5.5. Parallelwiderstand auf einer Doppelleitung

Im Normalfall sind die beiden Leitungen einer Doppelleitung voneinander isoliert, d.h. der Widerstand zwischen beiden Leitungen ist nahezu unendlich groß.

Um das Verhalten eines Parallelwiderstandes zu untersuchen, bietet das Simulationsprogramm TL jedoch die Möglichkeit, eine leitende Verbindung von bestimmter Breite und variablem Widerstand zwischen beide Leitungen zu setzen und zwar in der Mitte zwischen

Spannungsquelle und Abschlußwiderstand. Dadurch entsteht zusammen mit dem Abschlußwiderstand eine Parallelschaltung.

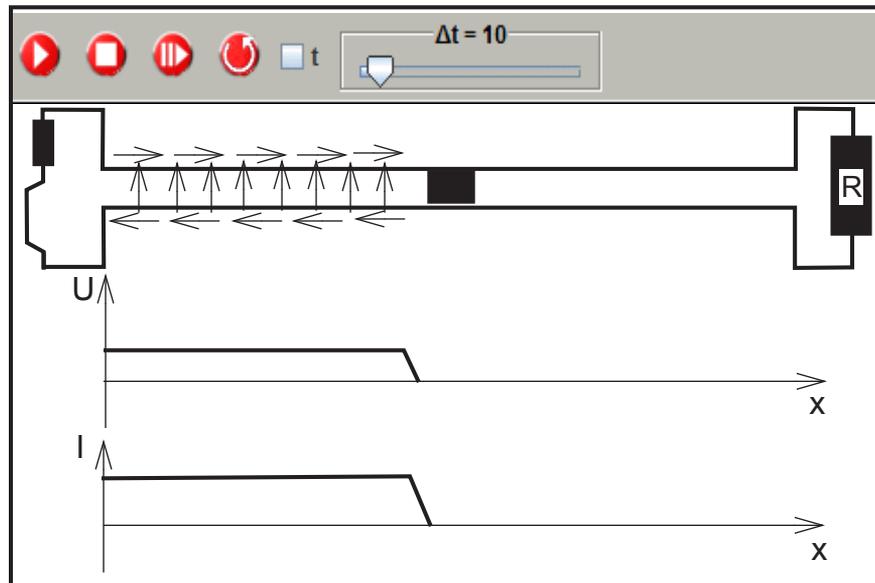


Abb.: 5.3. Doppelleitung mit einem Leckwiderstand parallel zum Abschlußwiderstand

Durch diesen Parallelwiderstand ändert sich das Verhältnis  $U/I$  und somit wird ein Teil einer auftreffenden Wellenfront oder eines Pulses reflektiert.

Erst nachdem diese Reflektionen abgeklungen sind, stellt sich ein Fließgleichgewicht ein, für das das Ohmsche Gesetz gilt.

