9. Zusammenfassende semantische Anmerkungen

Um an wesentliche semantische Aussagen zu erinnern, seien diese abschließend kurz zusammengestellt.

(1.1) Die Sachen können nach ontologischer Auffassung

- unabhängig von unserem Bewußtsein existieren (reale Sachen; Dinge, [Strahlungs-]Felder, Vorgänge [einschließlich der als punktuell aufgefaßten Ereignisse] und Zustände) oder
- nur in unserem Denken vorhanden sein (ideale Sachen; zum Beispiel Begriffe und Ordnungssysteme [beispielsweise eindimensionale Achsen oder dreidimensionale Koordinatensysteme]).

Die (idealen) Achsen und Achsensysteme sind nicht mit den (realen) Strichen zu verwechseln, mit denen sie auf einer Tafel, auf einem Blatt Papier oder auf einem Computerschirm verdinglicht werden.

(1.2) Die realen und die idealen Sachen können

- **Einzelsachen** oder
- **Sammelsachen (Mengen)**

sein.

(1.3) Die realen Sachen sind für unser Anschauungsvermögen in die Zeit und in den Raum eingebettet und können in zeitlichen und räumlichen Ordnungssystemen (zum Beispiel auf einer Terminachse oder in einem kartesischen Raumkoordinatensystem) positioniert werden.

(1.4) In unserem **Reden** und **Denken** ordnen wir den Sachen **Eigenschaften** zu:

- Die Strecke 1 hat die **Länge** "3 m" (essentielle meßbare Eigenschaft, Ausmaßeigenschaft, **Mensurable**);
- Die Sache 2 (die Menge 2) hat die **Anzahl** "3" (**essentielle zählbare** Eigenschaft, **Anzahl**eigenschaft, **Numerable**);
- Die Sache 3 **hat** den **Wert** "3 DM" (akzidentelle **zuordenbare** Eigenschaft, **Wert**eigenschaft, attribuable Eigenschaft, **Attribuable**).

Die Bezeichnung des Wertes als einer "Eigenschaft" entspricht der ontologischen Unterteilung der Seienden (der Entia, der 'Entitäten') **nur** in Sachen, Eigenschaften und Relationen, ist aber insofern unbefriedigend, als ein Wert nicht eine einer Sache unabtrennbar zukommende Eigenschaft, sondern eine nur in unserem Denken existierende, also ideale Sache ist; diese ordnen wir anderen Sachen, und zwar materiellen wie immateriellen, nur zu. Ein Wert ist also keine Eigenschaft in der üblichen Bedeutung des Wortes, sondern eine als Quasieigenschaft fungierende ideale Sache.

Essentielle Ausmaßeigenschaften haben sowohl Einzel- wie auch Sammelsachen; die **akzidentelle Werteigenschaft** kann sowohl Einzel- wie Sammelsachen **zugeordnet** werden; die **essentielle Anzahleigenschaft haben nur Sammelsachen** (einschließlich der als Mengen aufgefaßten Einermengen und leeren Mengen).

(1.5) Die Zeichen (und Begriffe) für die meßbaren, zählbaren und zuordenbaren Eigenschaften beziehungsweise Quasieigenschaften können in Rechnungen eingehen. Die Mensurablen, Mengen (Numerablen) und Werte (Attribuablen) können deshalb als "(algebraisch) Kalkulable" bezeichnet werden.

Das Attribut "algebraisch" ist erforderlich, wenn nicht nur von algebraisch Kalkulablen, sondern zum Beispiel auch von Vektoren geredet wird: Auch diese sind kalkulabel, aber nicht algebraisch kalkulabel, sondern kalkulabel gemäß den Regeln der Vektorrechnung (Teil 2).

(1.6) Die algebraisch Kalkulablen sind kalkulabel, weil sie quantifizierbar sind. Sie können deshalb auch als "**Quantifikable**" bezeichnet werden.

(1.7) Zu den Quantifikablen gehören auch die **Zahlen**.

(1.8) Die Quantifikablen (Zahlen, Mensurablen, Numerablen und Attribuablen) können verschieden groß sein und hinsichtlich ihrer Größe miteinander verglichen werden: 5 > 3; 5 m > 3 m; 3 Flaschen < 5 Flaschen; 3 DM = 300 Dpf. Sie sind also vergleichbar und können deshalb auch als "**Komparable**" bezeichnet werden.

(1.9) Das Groß-Sein der Komparablen - und nur dieses - wird hier als "Größe" bezeichnet. Das entspricht dem Alltagssprachgebrauch und ermöglicht, das Wort "Größe" nicht auch in der Bedeutung "physikalische Größe" zu verwenden.

(1.10) Die Größe von Mensurablen wird "**Ausmaß**" genannt, die von Numerablen "Anzahl". — Für die Größe von Zahlen und von (monetären) Werten haben sich noch keine eigenen Namen eingebürgert.

(1.11) Zwischen **zwei** (**oder mehr**) Sachen, die sowohl Einzel- wie auch Sammelsachen sein können, können auch **Bezüge** (Beziehungen, ˙Relationen˙) bestehen:

- Die Strecke 1 ist um 2 m länger als die Strecke 2.
- Die Menge 3 ist doppelt so groß wie die Menge 4.
- Die Sache 5 ist gleich teuer wie die Sache 6.

(1.12) Die Sachen können nicht nur hinsichtlich ihrer **Eigenschaften** in Relation stehen, sondern auch hinsichtlich

- ihrer zeitlichen Anordnung (gleichzeitig, um 2 Stunden früher) und hinsichtlich
- ihrer räumlichen Anordnung (ihrer **Örter**, ihrer [zweidimensionalen] **Lage**, ihrer [dreidimensionalen] **Stellung**).

(1.13) Eine reale Sache kann nicht nur mit einer zweiten realen Sache hinsichtlich ihrer Anordnung in Zeit und Raum in Relation gesetzt werden, sondern auch mit einem (idealen) Ordnungssystem.

Die Mensurablen,

- mit deren Hilfe der Termin eines (punktuellen oder nicht punktuellen) Vorgangs auf einer Terminachse positioniert wird (also die Dauer der Frist zwischen dem jeweiligen Termin und dem Nulltermin der Terminachse),
- mit deren Hilfe der Ort eines (punktuellen oder nichtpunktuellen) Dinges in einem Koordinatensystem positioniert wird (die Länge der Strecken, die vom jeweiligen Ort parallel zu den Koordinatenachsen und bis zu diesen gezogen werden),
- mit deren Hilfe die Lage (beispielsweise) einer Strecke in einem zweidimensionalen Koordinatensystem beschrieben wird (der ebene Winkel zwischen der Strecke und einer der beiden Koordinatenachsen) und
- mit deren Hilfe die Stellung (beispielsweise) einer Strecke in einem dreidimensionalen Koordinatensystem beschrieben wird (die drei ebenen Winkel zwischen der Strecke und den drei Koordinatenachsen)

unterscheiden sich nicht von den mensurablen Eigenschaften realer Sachen und werden deshalb auch mathematisch wie diese behandelt.

(2.1) Sachen und komparable Eigenschaften können auch Eigenschaften haben, die für die mathematische Behandlung empirischer Fragen von Belang sind, mathematisch aber nicht manifest werden, nämlich die sogenannten (physikalischen) Sinne.

Die Sinne können den Sachen und Komparablen

- untrennbar zukommen (essentielle Sinne) oder
- nur von uns den Sachen und Komparablen zugesprochen werden (zuordenbare [attribuable] Sinne).

(2.2) Sachen und Komparable, die einen Sinn haben oder denen wir einen Sinn zusprechen, haben zwei verschiedene Pole, sind also polarisiert. - Einen essentiellen Sinn hat zum Beispiel eine Gleit- oder eine Schraubbewegung oder eine Kraft; einen nur zugeordneten Sinn hat zum Beispiel ein als polar betrachtetes Rechteck, eine als polar betrachtete Hebelarmlänge oder ein Drehmoment in einem als polar betrachteten Raum (Teil 2).

(2.3) Die Sinne sind trotz ihres Mathematisch-nicht-manifest-Werdens mathematisch insofern von Belang, als sowohl zwischen polaren Sachen wie auch zwischen polaren komparablen Eigenschaften eine besondere, mathematisch behandelbare Relation bestehen kann, nämlich die Orientierungsrelation: Parallele polare Sachen und Komparable können gleich orientiert (gls) oder entgegengesetzt orientiert (ggs) sein, je nachdem, ob ihre mathematisch nicht manifest werdenden Sinne parallel oder antiparallel sind.

Die Orientierungsrelation ist keine komparable Relation, sondern eine Entweder-oder-Relation, also eine (alternativ) umschlagende Relation. Sie ist (aber) ebenfalls kalkulabel. So gilt zum Beispiel die Gleichung

(9.1) gls • ggs = ggs,

die in Gleichungen der Art

(9.2) gls • 5 N • ggs • 3 m = ggs • 15 Nm

mit enthalten ist.

Werden als Orientierungsfaktoren geeignete Zeichen gewählt, nämlich "+1" statt "gls" und „-1" statt "ggs", gehorchen diese dem üblichen Rechenalgorithmus, zum Beispiel in der Gleichung

(9.3) (+1) • (-1) = (-1),

die in Gleichungen der Art

(9.4) (+1) • 5 N • (-1) • 3 m = (-1) • 15 Nm

mit enthalten sind.

Da es nur zwei Orientierungsfaktoren gibt, ist das Rechnen mit diesen sehr einfach. Es ist aber kein algebraisches Rechnen, weil die Zeichen "+1" und "-1" für sich selber stehen und nicht - wie die Buchstaben der Algebra [zum Beispiel "$l(1)$"] - als Platzhalter für Kalkulable fungieren, deren einheitengebundenes Ausmaß (zum Beispiel "3 m") sich erst mit Hilfe der algebraischen Rechnung ergibt. - Vor allem sind die Zeichen "+1" und "-1" auch keine Zahlzeichen, sondern (eben) Zeichen für Orientierungsfaktoren. Dementsprechend sind auch die Zeichen "+" und „-“ , wenn sie an Stelle der Zeichen "+1" und "-1" als Zeichen für Orientierungsfaktoren verwendet werden, (ebenfalls) keine mathematischen Vor- oder Operationszeichen, sondern Zeichen für Orientierungsfaktoren.

Wir rechnen also nicht nur mit komparablen, sondern auch mit den ganz andersartigen alternierenden Relationen.

Und wir rechnen - wie die Gleichung 9.4 zeigt - auch mit Kombinaten von komparablen und alternierenden Relationen.

Eine Kalkulable der Art " $\overrightarrow{l(1)}$ = (-1) • 3 • m" ist (kein Zweifaktorenprodukt, sondern) ein Dreifaktorenprodukt:

(9.5) Komparablenaxor = Orientierungsfaktor mal Ausmaßfaktor
mal Bezugsausmaß.

Dieses Produkt beschreibt sowohl eine komparable Ausmaßrelation wie auch eine alternierende Orientierungsrelation.

Während die Orientierungsfaktoren als solche nicht algebraisch kalkulabel sind, sind die **Komparablen-Orientierungs-Kombinate algebraisch kalkulabel**: Die Zeichen der Axoren [zum Beispiel " $\overrightarrow{l(1)}$ "] stehen nicht für sich, sondern fungieren als Platzhalter für noch zu errechnende einheitengebunden angegebene Axoren [zum Beispiel für "(-1) • 3 • m"].

Werden an Stelle der Zeichen "+1" und "-1" (für die Orientierungsfaktoren) die verkürzten Zeichen "+" und "-" geschrieben, wird aus einem Dreifaktorenprodukt der Art "(-1) • 3 m" mathematisch formal ein (vermeintliches) Zweifaktorenprodukt mit einem «negativen Zahlenwert» (-3 • m).

(3.1) Ebenso wie die Mensurablen auf den Achsen eines kartesischen x-y-(z)-Koordinatensystems orientiert werden können, können auch die Zahlen auf den Achsen eines *R-I*-Achsensystems orientiert werden. Auch bei den Zahlen fungieren die Zeichen "+1" und "-1" beziehungsweise "+" und "-" als Zeichen für Orientierungsfaktoren (und nicht als Zahlzeichen beziehungsweise als Vor- oder Operationszeichen).

Hier ist von der Orientierung einer Zahl auf einer reellen oder auf einer imaginären Zahlenachse die Rede und nicht von einer Drehung einer Zahl von der reellen (imaginären) Achse auf die imaginäre (reelle). Eine solche Drehung wird mit Hilfe der Drehfaktorenzeichen "+i" und "-i" beschrieben.

(3.2) Die **Ortsaxoren (Koordinaten)**, die mit ihrem Startpol im Achsennullpunkt verankert sind und die der Positionierung von Punkten auf einer Achse dienen, können nicht als solche in den algebraischen Kalkül eingehen; das können an ihrer Stelle nur die vom Nullpunkt losgelösten Mensurablenaxoren, also die nur durch die Länge und die Orientierung der Axorpfeile dargestellten Axoren als solche.

Die **Zielpole der Koordinaten**, die im allgemeinen mit Hilfe von Zeichen symbolisiert werden, die ähnlich wie Zeichen für Mensurable aussehen (3 ^{h}MEZ, 3 ^{m}NN, -3 °C), können ebenfalls nicht in den algebraischen Kalkül eingehen.

(3.3) Ebenso können **Vektoren**, die nicht nur einen «Betrag» haben, sondern auch gerichtet sind, nicht dem algebraischen (sondern nur dem Vektorkalkül) unterworfen werden. Das Gleiche gilt (erst recht) für **Ortsvektoren**, deren Startpol im Koordinatennullpunkt verankert ist. — Deshalb bleibt beim algebraischen Rechnen die Nullpunktverankerung der Ortsvektoren unberücksichtigt und werden die Vektoren in achsenparallele Komponenten zerlegt, die als Axoren behandelt und damit auch in den algebraischen Kalkül eingegeben werden können (Teil 2).

(3.4) Dementsprechend werden auch die sogenannten komplexen Zahlen, also die Zahlen-Richtungs-Kombinate, die nicht als solche in den algebraischen Kalkül eingehen können, in achsenparallele und als Axoren behandelbare und damit auch in den algebraischen Kalkül eingebbare

Komponenten (also in ihre «Real-» und «Imaginärteile») zerlegt.

(4.1) Mit den vorstehenden Anmerkungen wird die schon des öfteren aufgetauchte Frage, was als "physikalische Größe" bezeichnet werden sollte, gegenstandslos: Der Name "physikalische Größe", der im übrigen auch Größen bezeichnet, die - wie zum Beispiel die Länge - in der Alltagssprache als "geometrische" und nicht als "physikalische Größen" bezeichnet werden, sollte aus Gründen der Eindeutigkeit überhaupt nicht verwendet werden. An seine Stelle sollte - wie vorstehend schon praktiziert - der Name "mensurable Komparable" oder der Kurzname "Mensurable" (oder ein entsprechender anderer Name) treten.

Geeignet wäre zum Beispiel auch der Name "quantifizierbare Eigenschaft" oder - kurz - "Quantität". Dieser wird im Englischen (in der Form "quantity") an Stelle unseres Ausdrucks "(physikalische) Größe" verwendet. - Es ist zu beachten, daß dieser Name nur bei Zahlen und Mensurablen angewendet werden kann, nicht aber bei Mengen und Werten. Diese sind - wie schon früher gesagt - nicht Quantitäten, die Sachen haben oder die Sachen zugeordnet werden können, sondern selber Sachen, und zwar Sachen, die (ebenso wie die mensurablen Eigenschaften) quantitativ erfaßbar sind. Sie können deshalb wohl als "Quantifikable", aber nicht als "Quantitäten" in der Bedeutung "meß- oder zählbare Eigenschaft" oder "zuordenbare Quasieigenschaft" bezeichnet werden.

Um keine Unklarheit bestehen zu lassen, sei noch gesagt, daß Werte nur dann als "Quantifikable" bezeichnet werden können, wenn dem lateinischen Wort "quantus" nicht nur die Bedeutungen "von welchem Ausmaß" („wie groß") und "von welcher Anzahl" („wie viele") zugeordnet werden, sondern auch die Bedeutung "von welchem Wert" („wie teuer"). Das dürfte in Anbetracht unserer Redeweisen („Wieviel kostet das?") auf keine besonderen Bedenken stoßen.

(4.2) Wir rechnen im Alltag wie in der Wissenschaft nicht nur mit Zeichen für Mensurable (einschließlich der reellen Zahlen, die den Ausmaßen von Mensurablenverhältnissen zugeordnet sind), sondern - und zwar legitim - auch mit Zeichen für Werte, Mengen und Anzahlen von Mengen sowie mit Zeichen für Komparablen-Orientierungs-Kombinate. Für das wissenschaftliche Rechnen ist deshalb der gesamte algebraische Kalkül von Belang, und nicht nur der «Größenkalkül», der wegen bestimmter Probleme im Vordergrund des Interesses stand und steht und der als "Mensurablenkalkül" bezeichnet werden könnte. - Da die algebraisch Kalkulablen auch als "Quantifikable" und als "Komparable" bezeichnet werden können, könnte der algebraische Gesamtkalkül auch als "Quantifikablenkalkül" oder als "Komparablenkalkül" bezeichnet werden.

$\rightarrow$

V