7. Rechnen mit Anzahlen

7.1. Anmerkungen zum Rechnen mit Anzahlen

(1) In der Physik und in der Technik wird bis jetzt nicht mit Mengen, wohl aber mit Anzahlen von Mengen gerechnet. Deshalb werden in den einschlägigen Normen auch Anzahlen (von Mengen) als physikalische Größen aufgeführt, und zwar die Anzahl der Menge von Freiheitsgraden /18/, von Kommutatorlamellen /24/, von Elektrizitätsleitern /24/, von Nuten /20/, von Phasen /16, 20, 24/, von Polpaaren /16, 20, 24/, von Spulenseiten /24/, von Strängen /20/, von Wicklungssträngen /24/, von Windungen /24/, von Zweigen /24/ und von «Teilchen» /16/.

Wie üblich, wird auch in den Normen zum Beispiel von der «Anzahl der Phasen» oder von der «Phasenzahl» gesprochen und nicht von der "Anzahl der Phasenmenge". Da ein korrekter Name der Art "Anzahl der Phasenmenge" sehr schleppend ist, ist verständlich, daß an seiner Stelle ein Name wie "Phasenzahl" verwendet wird. Das sollte im Unterricht aber nicht geschehen, bevor nicht unverlierbar klar ist, daß das tatsächlich Gemeinte nur mit dem Namen "Anzahl der Phasenmenge" zutreffend bezeichnet wird: 3 Phasen bilden eine Phasenmenge; und nur diese Menge hat die Eigenschaft "Anzahl 3"; den Phasen als solchen kommt keine Anzahl zu. (Auch die Anzahl "1" kommt nur einer Phasen-Einermenge zu, nicht aber einer einzelnen Phase als solcher.)

Für uns ist von besonderem Interesse, daß sowohl in der Thermodynamik und in der Molekülphysik wie auch in der Chemie mit «Teilchenzahlen» beziehungsweise «Anzahl von Teilchen» /16/ gerechnet wurde und wird. Besonders im Zusammenhang mit dem Avogadro-Gesetz, das für den begrifflichen Aufbau der Chemie von grundlegender Bedeutung ist (Abschnitt 8), dürfte auch heute noch ausschließlich von der «Anzahl der Moleküle» und weder von der Molekülmenge noch von der «Stoffmenge einer Gasportion» gesprochen werden.

Im Gasgesetz, das üblicherweise in der Form

(7.1) $p \bullet V = k \bullet n \bullet T$

geschrieben wurde, bezeichnete "n" die «Teilchenzahl» (die in dieser Arbeit mit "N" symbolisiert wird; Gleichung 3.6) und nicht die «Stoffmenge», die normgemäß mit "n" zu symbolisieren ist (siehe Unterabschnitt 3.1).

Die in 7.1 stehende Anzahl "n" kann in der Anzahleinheit "1" oder in der Anzahleinheit "$6{,}02 \bullet 10^{23}$ = 1 hen" angegeben werden. Wird die Zähleinheit "1" verwendet, wird die Konstante "k" zweckmäßigerweise in der Form

(7.2) k = 1,38 10-23 J/K

geschrieben («Boltzmann-Konstante»); wird die Zähleinheit "$6{,}02 \bullet 10^{23}$ = 1 hen" verwendet, wird sie zweckmäßigerweise in der Form

(7.3) $k = 8{,}31\ \mathrm{J/(K \bullet 6{,}02 \bullet 10^{23})} = 8{,}31\ \mathrm{J/(K \bullet hen)}$

geschrieben.

Die Konstruktgröße "Stoffmenge n" wurde erst im Jahre 1969 (!) eingeführt, und zwar zuerst im Deutschen Normenwerk /21/, bald darauf auch im Deutschen Einheitengesetz /10/ und dann (unter dem Namen "amount of substance") auch international. Seit dieser Einführung wird das Gasgesetz in der Form

(7.4) $p \bullet V = R \bullet n \bullet T$

geschrieben, wobei "n" jetzt aber die in der Einheit "1 mol" anzugebende Stoffmenge (und nicht die

«Teilchenzahl«) symbolisiert und die Konstante "R" (die «**universelle Gaskonstante**» /13/) nicht eine anzahl-, sondern eine stoffmengenbezogene Größe ist:

(7.5) R = 8,31 J/(K • mol).

(Man vergleiche hierzu die Gleichung 7.3.)

Das Rechnen mit der Stoffmenge soll an dieser Stelle noch nicht weiter besprochen werden. Obwohl zu ihm (wie im Abschnitt 8 noch zu zeigen sein wird) einige schwerwiegend unzutreffende Auffassungen geführt haben, fühlen sich heute die meisten im Umgang mit der Stoffmenge so sicher, daß sie die subjektiv empfundene Sicherheit nicht gegen eine - mit der Etablierung des Anzahlrechnens verbundene - neuerliche (obwohl nur vorübergehende) Unsicherheit eintauschen möchten. Es genügt deshalb nicht, nur zu beschreiben, wie mit der Stoffmenge gerechnet wird. Es ist vielmehr ausdrücklich und ausführlich zu zeigen, wie es zu den einschlägigen Fehlauffassungen und damit zum Rechnen mit der Stoffmenge kam. Und das soll im Abschnitt 8 geschehen.

(2) Röhrl deutet am Ende von /27/ an, daß man nach der Einführung jeweils einer einzigen SI-Einheit für jede einzelne Größe zum (vermeintlich einfacheren) «Zahlenwertrechnen» zurückkehren könne. Ein solches Rechnen wäre aber nur dann unmißverständlich durchzuführen, wenn erkennbar bliebe, um welchen «Zahlenwert» es sich jeweils handelt, also zum Beispiel um die Anzahl "5 = *N*(Voltmenge 1)" oder um die Anzahl "5 = *N*(Amperemenge 2)", wenn also das Anzahlsymbol "*N*" grundsätzlich mit einem Index geschrieben würde. Eine Gleichung der Art "*N*(V-Menge 1) = 5" brächte aber gegenüber einer Gleichung der Art "U(1) = 5 V" weder beim Schreiben noch beim Sprechen einen Vorteil.

(3) Ein Symbol der Art "$N(O_2\text{-M})$" (die Anzahl der O_2-Menge) sollte nicht zu einem Symbol der Art "$N(O_2)$" (die Anzahl der O_2-Moleküle) verkürzt werden, da - um es noch einmal zu sagen - immer nur eine Menge eine Anzahl hat. Das soll nicht ausschließen, daß man in der Praxis statt "Anzahl der O_2-Menge" verkürzt "O_2-Zahl" sagt - aber eben nur unter der Voraussetzung, daß man weiß, daß der Name "O_2-Zahl" an Stelle des korrekten Namens "Anzahl der O_2-Menge" verwendet wird.

Mit verkürzten Namen der vorstehenden Art wird im einführenden Physikunterricht des öfteren gearbeitet, um begrifflich-terminologische Schwierigkeiten bei der Einführung solcher Größen zu umgehen, die uns phänomenologisch nicht zugänglich sind, wie zum Beispiel die elektrischen Größen "Spannung", "Stromstärke" und "Widerstand". Anstatt die Größen als Kontinua zu behandeln, werden sie als (Quasi-) Diskontinua aufgefaßt, also als Voltmengen, Amperemengen und Ohmmengen, und es wird mit diesen Mengen gearbeitet, wobei statt "Anzahl der Voltmenge (Amperemenge, Ohmmenge)" "Voltzahl (Amperezahl, Ohmzahl)" gesagt wird. Die aus dem Ohmschen Gesetz

(7.6) $U \sim R \cdot I$,

die Spannung ändert sich proportional mit dem Widerstand und der Stromstärke,

sich ergebende Bestimmungsgleichung,

(7.7) $U_i = R_i \cdot I_i$

wird dann (zunächst) in der Form "Voltzahl ist gleich Ohmzahl mal Amperezahl " ausgesprochen.

Ein solches Vorgehen ist nur zu vertreten, wenn die Schüler Namen wie "Volt", "Ohm" und "Ampere" schon in den Unterricht mitbringen.

(4) Ein einziger Index am Anzahlsymbol "*N*" genügt nur dann, wenn die zwischen den Elemen-

ten der anzahlhabenden Mengen realiter immer bestehenden Beziehungen außer Betracht gelassen werden können. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn in der Chemie nur die Reaktionen zwischen Einzelhenaden betrachtet werden (Henadenchemie), beispielsweise die Reaktion von S-Atomen oder von S_8-Molekülen mit O_2-Molekülen:

(7.8) $S \circ O_2 \Rightarrow SO_2$,

(7.9) $S_8 \circ 8\, O_2 \Rightarrow 8\, SO_2$.

In diesen Fällen genügen zur Beschreibung der Anzahl der in die Reaktion eingehenden Henadenmengen Angaben der Art

(7.10) $N(\text{S-M } 1) = 48\ 10^{23}$,

(7.11) $N(S_8\text{-M } 2) = 6 \bullet 10^{23}$.

Wird dagegen berücksichtigt, daß in der Realität nicht Einzelhenaden, sondern (feste, flüssige und gasige) Henadenaggregate zur Reaktion gebracht werden (Henadenaggregatchemie), sind zur unmißverständlichen Beschreibung der Anzahl der Henadenmengen zwei Indizes erforderlich. So ist zum Beispiel bei energetischen Untersuchungen /38/ anzugeben, ob beispielsweise die S-Atome aus einem Stück rhombischen Schwefels oder aus einem Stück monoklinen Schwefels stammen:

(7.12) $N(\text{S-M aus einem rhombischen Schwefelkristall } 1) = 48 \bullet 10^{23}$,

(7.13) $N(\text{S-M aus einem monoklinen Schwefelkristall } 2) = 48\ 10^{23}$.

Ich wiederhole, daß diese Ausführungen jedermann, und insbesondere den Schülern, das Verständnis für die tatsächlichen Verhältnisse ermöglichen sollen, aber keinem Praktiker verbieten wollen, bei seinen Routinearbeiten die Schriftfiguren so weit zu vereinfachen, wie ihm das möglich zu sein scheint.

7.2. Anmerkungen zum Begriff und Namen "Anzahl"

(1) Da man mit Anzahlen nicht anders rechnet als mit anderen Zahlen, insbesondere nicht anders als mit Grund- oder Kardinalzahlen, ist zu begründen, warum hier überhaupt von "Anzahlen" gesprochen wird und nicht ausschließlich von "Zahlen" beziehungsweise von "Grundzahlen". Welcher Begriff ist dem Namen "Anzahl" zuzuordnen? Die Antwort auf diese Frage war lange Zeit unklar. Erst Frege wies nach, daß die Anzahlen Eigenschaften sind. Sie sind aber Eigenschaften einer besonderen Art, nämlich Eigenschaften, die nicht Einzeldingen, sondern nur Mengen (Sammeldingen) zukommen. - Wir sagen in sprachlich gleicher Weise "schwere Steine" wie "zehn Steine", und wir sagen auch "zehn schwere Steine". Der letzte Ausdruck besagt aber nur, daß jeder der Steine schwer ist, und nicht, daß jeder der Steine auch zehn sei. "Zehn" ist nicht die Eigenschaft eines einzelnen Steines, sondern eine Eigenschaft der Gesamtheit der Steine, also der Menge der Steine, und zwar die Eigenschaft der ⁏Zehnhaftigkeit⁏, die Eigenschaft, die Anzahl "zehn" zu haben. Diese Eigenschaft hat die Menge "10 Steine" mit jeder Zehnermenge gemeinsam, zum Beispiel mit der Menge der Finger oder der Menge der Zehen eines Menschen. Ebenso wie alle 10 kg schweren Dinge die Masse "10 kg" haben, haben alle Zehnermengen die Anzahl "10". (Diese Aussage ist weder pleonastisch noch zirkelschlüssig. Die Zahl "10" wird ja nicht durch die Zehnermenge definiert. Es wird vielmehr die Zahl "10" beispielsweise als die Anzahl der Fingermenge eines [normalen] Menschen definiert, und es werden erst dann alle Mengen, die gleich groß sind wie die Menge der Finger eines Menschen, als "Zehnermengen" bezeichnet.)

Die Zahlwörter unterscheiden sich von den anderen Eigenschaftswörtern also dadurch, daß sie zwei Aufgaben erfüllen. So macht zum Beispiel das Zahlwort "10" erstens aus 10 Einzeldingen ein Sammelding und gibt zweitens an, wie groß die Anzahl dieses Sammeldings ist. Es ist also (1) mengenbildend und gibt (2) Auskunft über eine Eigenschaft der gebildeten Menge, eben über deren Anzahl.

In der Mathematik wird der Begriff "Anzahl" oft mit Hilfe des Wortes "Mächtigkeit" eingeführt: Man kann zwei Mengen 1 und 2 hinsichtlich ihrer Mächtigkeit (schon) vergleichen, bevor man zählen kann und den Begriff der Zahl bildet: Es wird jedem Element der Menge 1 ein Element der Menge 2 zugeordnet, bis die Elemente einer der beiden Mengen oder beider Mengen ˙aufgebraucht˙ sind. Am Ende der Zuordnung kann man feststellen, ob die beiden Mengen gleich mächtig sind beziehungsweise welche der Mengen - im Falle der Ungleichmächtigkeit - die größere ist.

Vom Vergleichen der Mächtigkeiten zweier Mengen zum Feststellen der Anzahl einer einzelnen Menge kommt man dadurch, daß man ein für alle Male eine **Vergleichsmenge** konstruiert, nämlich die **gereihte Menge der natürlichen Zahlen**. Die Elemente dieser Menge sind so gereiht, daß der unmittelbare Nachfolger einer Zahl um genau 1 größer ist als die Vorgängerzahl. Den Zahlen werden Namen zugeordnet, die leicht und übersichtlich in einer steigenden Folge angeordnet werden können: eins, zwei, drei, ..., zehn, elf (eins über zehn), zwölf (zwei über zehn), dreizehn, ..., zwanzig, einundzwanzig, ..., dreißig, ..., vierzig__ zweihundertvierundvierzig, ... (Wie die Folge rational gebildeter Zahlwörter aussehen könnte, ist in /34/ beschrieben.) Das Bildungsgesetz dieser Zahlwortfolge ermöglicht, die Folge beliebig weit fortzusetzen und jeder noch so großen Zahl ein Zahlwort zuzuordnen.

Ist die Zahlwortfolge gebildet - was seine Zeit erfordert, aber von jedem gesunden Kind gemeistert wird -, können die Elemente jeder beliebigen Menge den Elementen der Zahlwortfolge - beim Element "eins" beginnend - zugeordnet werden. Wird das letzte Element der zu zählenden Menge dem Zahlwort "acht" zugeordnet, wissen wir, daß die Menge so groß ist wie die Teilmenge der Zahlwortfolge vom Element "eins" bis zum Element "acht". Diesen Vorgang der Zuordnung von Elementen jeder beliebigen Menge zu den Elementen der (nur) in unserem Denken existierenden Zahlwortfolge nennen wir "abzählen"; und das Ergebnis des Abzählens ist die Anzahl der gezählten Menge.

Während vor der Einführung der gereihten Menge der natürlichen Zahlen nur die Mächtigkeit zweier Mengen (durch paarweises Zuordnen ihrer Elemente) miteinander verglichen werden kann, kann jetzt die Mächtigkeit jeder einzelnen Menge durch Abzählen festgestellt werden, also durch Zuordnen ihrer Elemente zu den Elementen der ein für alle Mal gebildeten Zahlwortfolge. Die Mächtigkeit der Menge erhält den Namen der beim Abzählen jeweils erreichten natürlichen Zahl.

Mit der Zahlwortfolge sind wir selbstverständlich auch in der Lage, die Mächtigkeit zweier beliebiger Mengen miteinander zu vergleichen: Die mächtigere Menge ist diejenige, die die größere Anzahl hat; und welche der beiden Anzahlen die größere ist, ergibt sich unmittelbar aus ihrer Position in der gereihten Menge der natürlichen Zahlen.

Nach dem Erwerb der Fähigkeit, zu zählen, wird der Begriff der Mächtigkeit durch den der Anzahl präzisiert und ersetzt.

(2) Was sind nun Anzahlen? Wodurch unterscheiden sie sich von anderen Zahlen, insbesondere von den Grund- oder Kardinalzahlen? - Zunächst ist klar, daß sie **Ganzzahlen** sind.

Sie sind aber keine ˙positiven ganzen Zahlen˙: Zahlen haben gemäß den Ausführungen im Teil 2 einen Gleitsinn und können (hinsichtlich eines Bezugsgleitsinns) auf einer Achse orientiert (und in einem Koordinatensystem auch gedreht) werden. Solange sie nicht orientiert sind, sind sie weder «positive» noch «negative Zahlen». Und wenn sie orientiert sind und die Orientierung mit in die Rechnung eingehen soll, sind sie als Zahlen-Orientierungs-Kombinate (und nicht mehr als Zahlen in der im Teil 2 festgelegten Bedeutung) zu behandeln; sie sind dann also positiv oder negativ orientierte Zahlenaxoren (aber nicht positive oder negative Zahlen).

Aber wodurch unterscheiden sich die Anzahlen von den Grundzahlen? - Der Unterschied ist nicht mathematischer, sondern ontologischer Art. Anzahlen und Grundzahlen werden auf verschiedene Weisen definiert, und zwar der Begriff "Anzahl" erfahrungswissenschaftlich und der Begriff "Grundzahl" axiomatisch. Was das im einzelnen heißt, hat Wöhner in /43/ so deutlich beschrieben, daß ich ihn selber zu Wort kommen lasse.

«Man kann ... die Grundzahlen implizit definieren, d. h. rein formalistisch festsetzen und deuten, d. h. sie als Beziehungsglieder eines Axiomensystems auslegen. Sie haben aber dann keinen Bezug auf die Wirklichkeit, und man weiß heute ..., daß die implizit definierten Zahlen keine Anwendungsbasis hergeben. Die Grundzahlen werden also nur dann auf Erfahrung, d. h. auf die Wirklichkeit anwendbar, wenn ihnen ein inhaltlicher Sinn zukommt, d. h. sie müssen explizit definiert sein, wozu eine Zuordnung zur Erfahrungswelt nötig ist. Dies geschieht allemal durch Abzählen einer "Menge" von Gegenständen ... . Der Begriff der Menge als Abzählmenge, als das bloße Beieinander (Konjunktion) irgendwelcher Einzelelemente, ist also das Fundament der explizit, d. h. anwendbar definierten Grundzahlen, und je eine beliebige solcher Mengen konstituiert, unabhängig von irgendwelchen **Eigenschaften** der sie ausmachenden Elemente, eine der ganzen Zahlen. Jede solche Zahl wird damit aber notwendig zur **Anzahl** als Mehrheits**art** all derjenigen Mengen, die dieselbe **Anzahl** von Elementen haben, was dies für Elemente auch immer seien. Die **an**wendbare (explizit definierte) Ganzzahl ist also immer bereits eine **Anzahl** im Gegensatz zur **reinen** (implizit definierten) Zahl. Die "semantische Einheit" "an" haftet jetzt ... an der anderen semantischen Einheit "**Zahl**". "Anzahl" ist ... das satzlose Urteil für die soeben gegebene umständliche Erklärung desselben, und in dem isolierten Wort "Anzahl" ist der Bezug sowohl auf die Mengenart als auch auf die semantische Einheit "Menge" schon eingeschlossen, d. h. zwar verschwiegen, aber im Gedächtnis mitgemeint. So außerordentlich verdünnt, d. h. aufs äußerste abstrahiert dieses "an" an "Zahl" nun auch gerade noch auf irgend etwas Abgezähltes hinweist, so ist aber der Kern in der semantischen Einheit "an" voll anwesend. Es wäre daher ganz sinnentstellend, das Urteil "Anzahl", d. h. die damit gemeinte Art aller Mengen gleich vieler Elemente, synonym mit der semantischen Einheit "Zahl" zu gebrauchen, denn der "reinen", d. h. von jeglichem Bezug entblößten Zahl haftet eben überhaupt gar nichts "an"» (Hervorhebungen von Wöhner).

Eine Anzahl ist also - wie auch vorstehend schon gesagt - eine erfahrungswissenschaftlich festgelegte Ganzzahl und eine Kardinalzahl eine axiomatisch definierte Ganzzahl. Da wir es hier mit Anzahlen zu tun haben, sind diese auch als solche zu bezeichnen.

Ebenso wie der Name "Anzahl" nicht zum Wort "Zahl" zu verkürzen ist, ist auch der Name "Ausmaß" nicht zum Wort "Maß" zu verkürzen: Auch ein Ausmaß ist immer das an einer Sache gemessene Maß.

$\rightarrow$

V