6. Rechnen mit Mengen.
Abstrahieren und Idealisieren. Begriff und Schema

6.1. Vorbemerkungen

In der Praxis wird nicht nur mit Zeichen (und Begriffen) für Ausmaße und Werte gerechnet, sondern (und zwar von der Grundschule an) auch mit Zeichen (Namen und Symbolen) der Art "5 Flaschen" (Rechnen mit «benannten Zahlen»).

Auf die Frage, was solche Zeichen bezeichnen, werden verschiedene, im Unterabschnitt 6.3 noch zu nennende Antworten gegeben. Ich werde hier das mit solchen Zeichen Bezeichnete als "Menge" und (mit einem Gegenwort zum Wort "Einzelsache") auch als "Sammelsache" (Leibniz) und als "Kollektiv" bezeichnen.

Der Begriff, der hier mit dem Wort "Menge" bezeichnet wird, fällt durchaus unter die bekannte Definition von Georg Cantor (1845 bis 1918) («...eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens ... zu einem Ganzen»).

Die Grundbedeutung des Wortes "Menge" ist "manche". Dieses Wort weist auf eine Mehrheit von Sachen hin und sollte deshalb nur bei einem Diskontinuum (5 Flaschen, $6 \cdot 10^{23}$ Atome, 25 Umdrehungen, 6 Begriffe) angewendet werden. - Wer von "Atomen" und "Molekülen" spricht, spricht nicht mehr von einem Kontinuum (also nicht mehr von einer Stoffportion), sondern von einem Diskontinuum, das aus voneinander abgegrenzten Atomen und Molekülen aufgebaut ist und als "Henadenaggregat" bezeichnet werden sollte. In sich besonders inkonsequent ist das Wort "Stoffmenge" für die (physikalische) Größe, die definitionsgemäß der «Anzahl der Teilchen», proportional sein und die Größe eines Henadenaggregats kennzeichnen soll. - Man beachte die Doppeldeutigkeit des Wortes "Größe". Auf diese ist später noch einzugehen.

Das Wort "Sammelsache" wird von Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716) in seinen (französisch geschriebenen) Arbeiten nicht verwendet; wohl aber finden sich in den deutschen Übersetzungen zweier seiner Briefe /12,13/ die Wörter "Sammelding" und "Sammelwesen".

Beispiele für Gleichungen, in denen Zeichen für Mengen stehen, sind zum Beispiel die folgenden:

(6.1) $\quad$ 5 Flaschen + 3 Flaschen = 8 Flaschen

(6.2) $\quad \dfrac{\text{24 Flaschen}}{\text{Kasten}} \cdot \text{3 Kästen} = \text{72 Flaschen},$

(6.3) $\quad \dfrac{\text{0,64 kg}}{\text{Flasche}} \cdot \text{24 Flaschen} = \text{15,36 kg},$

(6.4) $\quad \dfrac{\text{0,75 DM}}{\text{Flasche}} \cdot \text{24 Flaschen} = \text{18 DM}.$

In der Gleichung 6.2 werden die Zeichen "Kasten" und "Kästen" und in den Gleichungen 6.3 und 6.4 die Zeichen "Flasche" und "Flaschen" in der gleichen Weise gegeneinander ˙gekürzt˙, wie in der Gleichung

100 km

(6.5) $\quad \dfrac{\text{100 km}}{\text{Stunde}} \cdot \text{3 Stunden} = \text{300 km}$

die Zeichen "Stunde" und "Stunden" gegeneinander ˙gekürzt˙ werden. Bevor ich den Begriff der

Menge und das Rechnen mit Mengen näher bespreche, gehe ich - zur Vorbereitung späterer Ausführungen - auf einige allgemeinere Probleme ein.

6.2. Semantische, wissenschaftstheoretische und erkenntnispsychologische Vorklärungen

6.2.1. Sache, Begriff und Name. Bezeichnen, Bedeuten, Meinen

Ein Name wie "Flasche" bezeichnet nicht nur eine realiter existierende Sache "Flasche", sondern auch den nur in unserem Denken existierenden Begriff "Flasche". Während es viele reale Flaschen gibt, gibt es nur einen einzigen Begriff "Flasche". (Diese Aussage wird nicht davon berührt, daß dieser Begriff spezifiziert werden kann und es deshalb auch Unterbegriffe wie "Bierflasche", "Weinflasche" oder "Medizinflasche" gibt.) Wir bezeichnen also eine reale Sache und den dieser Sache zugeordneten Begriff mit dem gleichen Namen, verwenden diesen also nicht eindeutig. Um zu verhindern, daß die Mehrdeutigkeit zu größeren Schwierigkeiten führt, wird gesagt, daß ein Name nicht nur sowohl eine Sache wie auch einen Begriff bezeichne, sondern auch, daß er das auch in zwei unterschiedlichen Weisen mache: Er bezeichnet und meint eine Sache, und er bezeichnet und bedeutet einen Begriff. - Ein Begriff ist bei dieser Sprachregelung also das, was ein Name bedeutet; er ist also - substantivisch ausgedrückt - die Bedeutung des Namens. Dem entsprechend wäre eine Sache das, was ein Name meint beziehungsweise - wiederum substantivisch ausgedrückt - die 'Meinung' (das meaning) des Namens.

Das Wort "meaning" spielt in der neueren wissenschaftstheoretischen Literatur eine wichtige Rolle.

Da ein und derselben Sache bei verschiedenen Betrachtungen verschiedene Begriffe zugeordnet werden können und die Sache eben deshalb auch mit verschiedenen Namen zu bezeichnen ist, stehen Sache, Begriff und Name zueinander in einem nicht trivialen und oft zu wenig bedachten Verhältnis. - Zur Erläuterung dieser Aussage sei an einem konkreten Beispiel aus der Chemie gezeigt, wie ein und dieselbe Sache bei verschiedenen Fragestellungen begriffen (begrifflich erfaßt) und benannt werden kann, und zwar am Beispiel eines bestimmten (chemischen) Stoffes.

(1) Wenn wir holistisch-phänomenologisch nach der Entstehung dieses Stoffes fragen, können wir sagen, daß er bei der Verbrennung von Zink an Luft entsteht. Wenn ein fester Verbrennungsrückstand als "Asche" bezeichnet wird, kann der Stoff als "Zinkasche" bezeichnet werden. Dem Stoff kann also bei dieser Fragestellung der Begriff "Stoff, der bei der Verbrennung von Zink an Luft als fester Verbrennungsrückstand entsteht" und der Name "Zinkasche" zugeordnet werden.

(2) Wenn wir - ebenfalls noch holistisch-phänomenologisch - nach der (chemischen) Zusammensetzung dieses Stoffes fragen, können wir (nach entsprechenden experimentellen Untersuchungen) sagen, daß er (nur) aus Zink und Sauerstoff 'besteht'. Wenn wir einen Sauerstoff-haltigen Einstoff (also nicht ein Sauerstoff-haltiges Gemisch wie Luft) als "Oxid" bezeichnen, kann der Stoff als "Zinkoxid" bezeichnet werden. Dem Stoff kann bei dieser Fragestellung also der Begriff "Stoff, der nur aus Zink und Sauerstoff 'besteht' ('zusammengesetzt' ist)" und der Name "Zinkoxid" zugeordnet werden.

(3) Wenn wir bei einer atomistisch-deutenden Betrachtung ebenfalls nach der Zusammensetzung des Stoffes fragen, können wir (nach vielen weiteren experimentellen Untersuchungen und theoretischen Überlegungen) sagen, daß der 'Stoff', der sich bei dieser Betrachtung als eine Henadenaggregatstruktur erweist, aus elektrisch geladenen Zinkatomen (Zinkionen) und elektrisch geladenen Sauerstoffatomen (Sauerstoffionen) im Anzahlverhältnis 1 : 1 aufgebaut ist. Wenn einem Zinkion der Name (das Symbol) "Zn^{2+}" und einem Sauerstoffion der Name "O^{2-}

zugeordnet wird, kann der Stoff als "$Zn^{2+}O^{2-}$"(meistens zu "ZnO" verkürzt) bezeichnet werden. Dem Stoff kann also bei dieser Fragestellung der Name "$Zn^{2+}O^{2-}$" und der folgende Begriff zugeordnet werden: "Ionenaggregatstruktur, die aus Zn^{2+}-Ionen und O^{2-}-Ionen so aufgebaut ist, daß die Ionen der beiden Arten im Anzahlverhältnis 1 : 1 stehen und in einer bestimmten Weise angeordnet sind".

Zum Namen "Aggregatstruktur" ist folgendes anzumerken: Das, was bei einer holistischen Betrachtung als eine (begrenzte) "Stoffportion" bezeichnet wird, erweist sich bei atomistischer Betrachtung als ein (begrenztes) Henadenaggregat. Das, was wir bei holistischer Betrachtung als einen (unbegrenzt zu denkenden) "Stoff" bezeichnen, erweist sich bei atomistischer Betrachtung (nicht als ein Henadenaggregat, sondern) als eine (unbegrenzt zu denkende) Henadenstruktur. - Während man im Kontinuumsdenken von den Stoffen ausgeht und von diesen in Gedanken Portionen herausgrenzt, um zu Stoffportionen zu kommen, geht man im Diskontinuumsdenken von Henaden aus und bildet aus diesen - gedanklich aufbauend - die Henadenaggregate. - Während ohne grundsätzliche begriffliche Schwierigkeiten verstanden werden kann, was Henaden und was Henadenaggregate sind, gelingt es im Kontinuumsdenken grundsätzlich nicht, den Begriff "Stoff" zu definieren. (Die Aussage, daß Stoffe das sind, woraus die Dinge bestehen, ist im Chemieanfangsunterricht wohl unentbehrlich; sie ist aber keine Definition des Begriffs "Stoff".) Eben diese grundsätzliche Schwierigkeit erfordert (gemeinsam mit weiteren Schwierigkeiten), daß neben dem Kontinuumsdenken, das sich bei der Untersuchung der stofflichen Phänomene herausgebildet hat und das bei phänomenologischen Betrachtungen unentbehrlich bleiben wird, auch das von diesem Denken grundsätzlich unterschiedene Diskontinuumsdenken weiter entwickelt und praktiziert wird.

Zum Namen "Aggregatstruktur" ist noch anzumerken, daß hier unter "Struktur" nicht nur die Anordnung der Henaden in einem Aggregat verstanden wird (also bei einem Kristall nicht nur der Kristallgittertyp), sondern die Henaden in ihrer jeweiligen Anordnung. Die Henaden als solche haben bei einer präzisen Beschreibung einer Henadenaggregatstruktur den gedanklichen Primat vor ihrer Anordnung.

Die drei verschiedenen Namen bedeuten also drei verschiedene Begriffe, meinen aber ein und dieselbe Sache, eben einen bestimmten Stoff. Nur Namen und Begriffe sind einander umkehrbar eindeutig zugeordnet (oder sollten es jedenfalls sein), während die Zuordnung sowohl von Namen wie auch von Begriffen zu einer Sache nicht umkehrbar eindeutig ist.

Zu den Namen "bedeuten" und "meinen" vergleiche man auch die Ausführungen im Punkt 1.5 des 1. Abschnitts.

6.2.2. Abstrahieren und Idealisieren.
Die Begriffe als ideale Sachen.
Menge und Mengenelement

Wie kommen wir von den Einzelsachen, die wir hinsichtlich der Begriffsbildung als gleichartig betrachten, zu einem Begriff? - Ein Begriff der Art "Flasche" oder "C-Atom" wird durch Abstrahieren gewonnen, also durch Absehen von allen Eigenschaften (Merkmalen), durch die sich die unter den jeweiligen Begriff fallenden Sachen unterscheiden. So sehen wir bei der Bildung des Begriffs "Flasche" zum Beispiel ab von der Masse, vom (nutzbaren) Volumen, von der chemischen Beschaffenheit und von der Farbe des Flaschenglases sowie von der Art des Flaschenverschlusses (Korkenverschluß, Kronenverschluß, Bügelverschluß); bei der Bildung des Begriffs "C-Atom" sehen wir ab von der Menge der Nukleonen im einzelnen Atomkern (12C-Atome, 14C-Atome) und vom Zustand der Elektronenhülle (der bei voneinander isolierten C-Atomen anders ist als bei C-Atomen im Verband eines Graphit- oder eines Diamantkristalls).

Bei der Bildung von Begriffen der Art "5 Flaschen" oder "$6 \cdot 10^{23}$ C-Atome" sehen wir nicht nur von den Eigenschaften ab, durch die sich die realen Einzelsachen voneinander unterscheiden, sondern auch von den (geometrischen und anderen) Beziehungen zwischen den Einzelsachen. So ist es bei der Bildung des Begriffs "24 Flaschen" zum Beispiel gleichgültig, ob den realen Flaschen in einem Flaschenkasten durch einen Kasteneinsatz eine bestimmte geometrische Anordnung aufgezwungen ist oder ob die Flaschen in einem regellos gebildeten Haufen vorliegen; bei der Bildung des Begriffs "$6 \cdot 10^{23}$ C-Atome" ist es gleichgültig, ob die Atome voneinander isoliert und nicht in einer bestimmten Weise angeordnet sind oder ob sie in einem Kristallverband durch Bindungskräfte in einer bestimmten Anordnung zusammengehalten werden.

Wird in besonderen Fällen nicht von allen Anordnungsbeziehungen zwischen den realen Einzelsachen abgesehen, wird die Menge durch ein besonderes Attribut näher gekennzeichnet („gereihte Menge", "geordnete Menge", "wohlgeordnete Menge") und dadurch von den als "ungeordnet" zu bezeichnenden Mengen auch terminologisch unterschieden.

Da wir beim Konzipieren eines Begriffs von den unterscheidenden Eigenschaften der realen Einzelsachen und von den Beziehungen zwischen den Einzelsachen absehen, werden die Begriffe als "(logische) Abstrakta" bezeichnet. Dieser Name besagt nur, daß ein Begriff durch Abstrahieren gewonnen wird, sagt also nicht, was der Begriff als solcher ist. Ein Begriff wird nicht durch das bestimmt, was bei seiner Bildung als «unwesentlich» unberücksichtigt bleibt, sondern durch das, was beim Abstrahieren als «wesentlich» betrachtet wird und von dem gerade nicht abgesehen wird. Und das ist eine (nur) in unserem Denken existierende Sache, also eine Gedankensache oder - ontologisch ausgedrückt - eine ideale Sache. - Wenn ein Begriff nur als etwas "Abstraktes" und nicht auch als etwas "Ideales" bezeichnet wird, wird der Unterschied zwischen dem logischen Begriffspaar "konkret/abstrakt" und dem ontologischen Begriffspaar "real/ideal" nicht bewußt gemacht und damit die Einsicht in das, was ein Begriff ist, erschwert: Ein Begriff ist nämlich - in ontologischer Sicht - nichts anderes als die ideale Sache selbst, die wir im Vollzug des Abstrahierens aus den realen Sachen gewinnen. Wir sehen beim Idealisieren gewissermaßen durch die (unter den jeweils gleichen Begriff fallenden) realen Sachen hindurch und erkennen hinter diesen eine nur in unserem Denken existierende und mithin ideale Sache. Es ist also wesentlich, daß ein Begriff durch Idealisieren realer (materieller oder immaterieller) Sachen gewonnen wird. Und das Idealisieren erfolgt eben dadurch, daß man bei den unter den jeweils gleichen Begriff fallenden realen Einzelsachen von den unterscheidenden Eigenschaften und bei den unter den jeweils gleichen Begriff fallenden Sammelsachen auch noch von den Beziehungen zwischen den die Sammelsachen bildenden Einzelsachen absieht.

Wenn wir früher sagten, daß ein Name wie "Flasche" auf eine real existierende Flasche hinweise und einen Begriff bedeute, können wir jetzt deutlicher sagen: Ein Sachname meint eine real existierende Sache und bedeutet eine (nur) ideal existierende Sache, eben einen aus den realen Sachen durch Idealisieren gewonnenen Begriff.

Diese Aussage schließt selbstverständlich nicht aus, daß wir auch unzutreffende Begriffe 'konzipieren', also die realen Sachen auch zu unzutreffenden idealen Sachen 'idealisieren'.

Beim Idealisieren einer realen Menge (eines realen Kollektivs) zu einer idealen Menge gehen die (die reale Menge bildenden) Einzelsachen in ideale Elemente der idealen Menge über. Ebenso wie eine reale Einzelsache das konstitutive Korrelat einer realen Sammelsache ist, ist das ideale Element das konstitutive Korrelat einer idealen Menge.

Ebenso wie es viele reale Flaschen, aber nur einen einzigen Begriff "Flasche" gibt, gibt es auch viele reale Kollektive "5 Flaschen", aber nur einen einzigen Begriff "5 Flaschen".

Um Unklarheiten zu vermeiden, seien zwei Anmerkungen gemacht.

(1) Bei der Bildung des Begriffs einer Sammelsache, zum Beispiel des Begriffs "5 Flaschen", wird nur von den unterscheidenden Eigenschaften der einzelnen realen Flaschen und von den Beziehungen zwischen diesen Flaschen abgesehen, nicht aber von der Anzahl der realen Sammelsache. Diese ist sowohl für die reale Menge "5 Flaschen" wie auch für den Begriff (für die ideale Menge) "5 Flaschen" wesentlich.

Die Kollektive materiell-energetischer Dinge und Vorgänge haben nicht nur meßbare Eigenschaften, zum Beispiel eine Masse, ein Volumen oder eine Geschwindigkeit, sondern - ebenso wie die immateriellen Mengen - darüber hinaus auch noch eine nur ihnen zukommende Eigenschaft, die nicht durch Messen, sondern grundsätzlich durch Abzählen bestimmt wird. Diese Eigenschaft kann als "Anzahleigenschaft", "Anzahlhaftigkeit" (haft = habend), "Anzahligkeit" oder "Mächtigkeit" bezeichnet werden. Die Größe (das 'Ausmaß') der Anzahleigenschaft kann als "Anzahl" bezeichnet werden, so wie die Größe einer Ausmaßeigenschaft als "Ausmaß" bezeichnet wird. (Hierzu folgen später noch weitere Ausführungen.)

Das Wort "grundsätzlich" im vorstehenden Absatz ist erforderlich, weil man in der Praxis die Anzahl einer Menge nicht nur durch Abzählen, sondem auch durch Messen bestimmen kann, so wie man umgekehrt auch die Ausmaße meßbarer Eigenschaften durch Abzählen bestimmen kann: Die extensiven Größen einer realen Dingmenge ändern sich ja proportional mit deren Anzahl. Das «Abzählen durch Messen» wird in der Technik viel angewendet, zum Beispiel wenn eine vollautomatische Abfüllanlage, beispielsweise für Tabletten, so gebaut ist, daß eine Wägevorrichtung die Anhäufung von Tabletten immer dann unterbricht und die jeweils angesammelte Tablettenmenge zu einem Verpackungsapparat weiterleitet, wenn die (reale) Tablettenmenge eine bestimmte Masse und damit auch eine bestimmte Anzahl hat. - Und das «Messen durch Abzählen» wird heute, da immer mehr Geräte, insbesondere auch Meßgeräte, digitalisiert werden, auch Nichtfachleuten immer deutlicher bewußt.

(2) Beim Übergehen von der real existierenden Menge "300 Flaschen" zu der nur in unserem Denken existierenden Gedankensache "300 Flaschen" bleiben wir im Bereich der (seienden) Sachen: Die reale Sache "300 Flaschen" ist eine Sache aus dem Bereich des realen Seins; die ideale Sache "300 Flaschen" ist eine Sache aus dem Bereich des idealen Seins. - Diese Anmerkung ist erforderlich, weil Röhrl in /27/ sagt, daß ein Zeichen der Art «300 Flaschen» eine Eigenschaft bezeichne (6.3.1).

6.2.3. Begriff und Schema

Wenn ein Kind, das 5 Bierflaschen und 3 Weinflaschen sieht und sagt, daß es 8 Flaschen sehe, müßte es nach den bisherigen Ausführungen vor dieser Aussage eine (bewußte) Abstraktion vollzogen haben. Zu einer solchen ist es aber zunächst überhaupt nicht in der Lage. Die erforderliche gegenteilige Annahme, daß das Kind auch ohne bewußtes Abstrahieren zu seiner Aussage kommen kann, spricht aber trotzdenn nicht gegen das bis jetzt Gesagte. Dieses ist nur zu ergänzen: Der angedeutete Widerspruch entspringt (nicht einem größentheoretischen, sondern) einem erkenntnispsychologischen Problem. Dieses kann hier nicht näher behandelt, soll aber doch wenigstens angesprochen werden.

Im Verlauf der wissenschaftlichen Arbeit werden Begriffspyramiden erstellt, in denen

- die jeweils allgemeineren (generelleren, höher stehenden) Begriffe durch Verallgemeinern (Generalisieren) aus den jeweils spezielleren (niedriger stehenden) gewonnen werden und in denen
- die jeweils spezielleren Begriffe durch Spezialisieren (Spezifizieren, Differenzieren) aus den

jeweils allgemeineren abgeleitet sind.

Zweifellos kann ein kleines Kind, das das wissenschaftlich-rationale Denken erst lernen und üben muß, nicht durch rationales Generalisieren von Begriffen der Art "Bierflasche" und "Weinflasche" zum Begriff "Flasche" oder durch rationales Differenzieren von diesem Begriff zu den genannten (und weiteren) Unterbegriffen kommen. - Wie kommt aber ein Kind zu den ersten ⁚Begriffen⁚?

Um diese Frage zu beantworten, ergänze ich das Flaschenbeispiel durch Beispiele aus der Einteilung der Lebewesen in systematische Gruppen (Fische, Vögel, ...; Wirbeltiere, ...) und in phänomenologische Gruppen (Bäume, Sträucher; Holzgewächse). Diese können zeigen, daß auch erwachsene Menschen zu einem beträchtlichen Teil nicht in rational definierten Begriffen denken.

Ein Kind kann Fische als "Fische" ansprechen und Vögel als "Vögel", lange bevor es (spezialisierend) Karpfen, Barben, Forellen, ... beziehungsweise Kohlmeisen, Zeisige, Grasmücken, ... unterscheiden kann und lange bevor es in der Lage ist, (generalisierend) den Begriff "Wirbeltier" zu erfassen. Auch viele Erwachsene können zum Beispiel Gräser oft nur als "Gräser" ansprechen und Schnecken nur als "Schnecken", während Fachleute in jeder dieser beiden systematischen Gruppen Hunderte von Arten unterscheiden und Gräser wie Schnecken zutreffend in das Gesamtsystem der Lebewesen einordnen können.

Das begriffliche Denken nimmt seinen Anfang offensichtlich bei Namen, die «Begriffen mittlerer Allgemeinheit» (Arthur Schopenhauer, 1788 bis 1860) zugeordnet sind, und schreitet von diesen sowohl zu spezielleren wie auch zu allgemeineren Begriffen weiter. Nur so ist zu verstehen,

- daß Begriffspyramiden von Begriffen mittlerer Allgemeinheit ausgehend nach unten und nach oben hin entwickelt werden,
- daß man über Sachverhalte reden kann, ohne daß man die speziellsten und die allgemeinsten Begriffe kennt, und
- daß sowohl die Feinsystematik wie auch die Kategorialanalyse umso schwieriger werden, je weiter man sich von den Begriffen mittlerer Allgemeinheit entfernt.

Unabhängig von der systematischen Entwicklung der Begriffspyramide kann die Verwendung wichtiger Namen wie "Ding" oder "Sache" mit Hilfe geeigneter Belehrungen vergleichsweise schnell vermittelt werden, zum Beispiel indem man auf verschiedene Dinge zeigt und sagt "Das ist ein Ding, und das ist ein Ding, und das ist ein Ding, ...". Das ermöglicht, daß Kinder einen Namen wie "Ding" bald zutreffend verstehen und selbst benutzen können, ohne daß sie wissen, daß es eine Namenspyramide gibt, oder gar, an welcher Stelle der Namenspyramide das Wort "Ding" steht.

⁚Begriffe⁚ der Art "Fische" und "Vögel", über die das heranwachsende Kind bald verfügt und von denen das begriffliche Denken zu Beginn der rationalen Entwicklung ausgeht, können notwendig keine rational definierten Begriffe sein, also keine Begriffe, die zu Recht so bezeichnet werden könnten. Worum es sich bei diesen ⁚Begriffen⁚ tatsächlich handelt, verdeutlichen die Erkenntnisse der Verhaltensforschung (Ethologie). Diese hat in zahlreichen empirischen Untersuchungen nachgewiesen, daß Tiere (und auch Menschen) über vergleichsweise einfache Schemata verfügen, denen das jeweils Wahrgenommene entspricht oder nicht entspricht.

Wie weit Schemata angeboren sind oder (besonders beim Menschen) sich noch im Verlauf der individuellen Entwicklung herausbilden, bleibe hier dahingestellt. Es genügt, zu wissen, daß zum Beispiel vergleichsweise einfache Attrappen von Feindtieren bei Beutetieren das gleiche Verhalten auslösen wie die komplexen Feindtiere selbst. So fliehen beispielsweise Hühner vor einer geeigneten einfachen Attrappe eines Habichts in gleicher Weise wie vor einem tatsächlichen Habicht. Dieser und die Attrappe fallen für die Hühner offenbar unter ein und dasselbe Schema, und zwar ohne daß deshalb den Hühnern ein rationales Abstraktionsvermögen zugesprochen werden könnte oder müßte.

Solche Schemata funktionieren offensichtlich auch beim Menschen. Auch ein Menschenkind erkennt einen Baum als Baum (und bezeichnet diesen als "Baum"), auch wenn es den Begriff "Baum" noch nicht rational definieren kann. - Wenn sich das Kind einen Baum vorstellt, kann es sich sicherlich nur eine Kiefer oder eine Fichte oder eine Roßkastanie vorstellen (sich also ein Wahrnehmungsbild mehr oder weniger deutlich vergegenwärtigen), aber nicht einen Baum schlechthin, also einen Baum, der weder eine Kiefer noch eine Fichte noch eine Roßkastanie noch ein anderer schon früher wahrgenommener Baum ist. Das Kind verfügt aber notwendig bald über ein **Schema** "Baum schlechthin", unter das alle wahrgenommenen Bäume fallen; sonst könnte es diese Bäume nicht als "Bäume“ ansprechen. Das Schema "Baum" ist zweifellos sehr einfach und wird sicherlich vor allem durch die Merkmale "vergleichsweise großes Holzgewächs" und "gegliedert in einen (einzelnen) Stamm und in eine Krone" (also in einen Stamm und in ein Astwerk, das erst in einiger Höhe über dem Boden ausgebildet ist). Ob der Baum Nadeln oder Blätter hat oder - wie die sommergrünen Laubbäume im Winter - weder Nadeln noch Blätter, gehört schon nicht mehr zum Schema "Baum": Sowohl Nadelbäume wie auch Laubbäume werden vom Kind sowohl im Sommer wie auch im Winter als "Bäume" erkannt und angesprochen. - Und der Heranwachsende spricht auch einen Strauch schon bald als "Strauch" an, und zwar auf Grund eines wiederum sehr einfachen Schemas. Dieses wird vor allem durch die Merkmale bestimmt "Holzgewächs, das kleiner als Baum ist" und "schon vom Boden an verzweigt".- Die Einordnung eines Holzgewächses in die Schemata "Baum" und "Strauch" kann bei untypisch gewachsenen Bäumen und Sträuchern sowie in bestimmten Grenzfällen unsicher sein, funktioniert aber in typischen Fällen zuverlässig. Und das genügt durchaus für das anfängliche Sich-in-der-Welt-Zurechtfinden.

Die Schemata sind also notwendig keine Wahrnehmungsbilder; sie sind aber auch keine Begriffe in der üblichen Bedeutung des Wortes: Sie werden nicht durch rationales Abstrahieren gewonnen, sondern intuitiv erfaßt. Wenn wir auch (noch) nicht genau wissen, wie das im Einzelnen geschieht, können wir doch sagen, daß die Schemata wirksam und folglich auch vorhanden sind und daß das Unter-ein-intuitiv-erfaßtes-Schema-Fallen im Endeffekt in gleicher Weise funktioniert wie das Unter-einen-rational-definierten-Begriff-Fallen. - Wir denken also nicht nur in Anschauungsbildern, Begriffen und Wörtern, sondern auch in Schemata.

Ebenso wie die Schemata "Holzgewächs" einerseits und "Baum" und "Strauch" andererseits bilden sich beim jungen Menschen sicherlich auch bald Schemata wie "Flasche" einerseits und "Bierflasche", "Weinflasche", "Medizinflasche" andererseits heraus, und zwar gleichgültig, ob intuitiv spezialisierend oder intuitiv generalisierend, und unbeschadet der Tatsache, daß der Heranwachsende die Merkmale dieser Schemata nicht präzise angeben könnte. (Welcher Erwachsene könnte es auf Anhieb?) So wie ein Baum bald mit großer Sicherheit als "Baum" angesprochen wird, gleichgültig wie er im Einzelnen aussieht, wird auch eine Flasche bald als "Flasche" angesprochen, wiederum gleichgültig wie sie im Einzelnen beschaffen ist.

Wenn der Heranwachsende 5 Bierflaschen und 3 Weinflaschen zu 8 Flaschen zusammfaßt, muß er also zuvor nicht auf Grund einer rationalen Abstraktion erfaßt haben, daß alle 8 von ihm wahrgenommenen Sachen unter den Begriff "Flasche" fallen; er kann auch auf Grund einer Intuition erfassen, daß sie unter das Schema "Flasche" fallen. Wir haben deshalb die Aussage, daß ein Name einen Begriff bedeute, in einer wesentlichen Hinsicht zu ergänzen: Ein Name, der auf eine Sache hinweist, bedeutet nicht nur (für einen zu rationalem Denken Befähigten) einen Begriff, sondern (für einen das rationale Denken erst Erlernenden) auch ein Schema.

Das spätere Ersetzen der Schemata durch Begriffe ist von großer Bedeutung: Während die intuitive Erfassung von Schemata zu unzutreffenden Meinungen verleiten kann (indem man zum Beispiel den Säuger "Wal" für einen Fisch hält [„Walfisch"] oder den Fisch "Aal" für eine Schlange), führt das rationale Denken zu Begriffen, die am Ende der Entwicklung so weit ausdifferenziert sind, daß eindeutig klar ist, welche Sachen unter welchen Begriff fallen.

Für die (an das ursprüngliche Arbeiten mit Schemata sich anschließende) Begriffsbildung werden bald auch andere als nur die sichtbaren Merkmale von Bedeutung. Solange man nur die morphologischen Merkmale berücksichtigt, ist die Zusammenfassung von Aalen und Schlangen in ein und derselben Gruppe durchaus verständlich; erst wenn man die anatomischen Unterschiede (zum Beispiel die Ausbildung von Kiemen einerseits und von Lungen andererseits) und die genetischen (und damit stammesgeschichtlich-verwandtschaftlichen) Gemeinsamkeiten beziehungsweise Unterschiede für wichtigere Einordnungskriterien hält, ist eine solche Zusammenfassung nicht mehr möglich.

Nun ist nur noch anzumerken, daß das Gräser- und das Schneckenbeispiel deutlich gemacht haben dürften, daß (nicht nur die Heranwachsenden, sondern) auch die zu rationalem Denken befähigten Erwachsenen außerhalb ihrer besonderen Interessengebiete in einem beträchtlichen Ausmaß in Schemata (und nicht in rational definierten Begriffen) denken.

6.3. Unzutreffende Argumente für und gegen das Rechnen mit Mengen
Quantifikable, Mensurable, Numerable und Attribuable

6.3.1. Das Rechnen mit Zeichen (und Begriffen) der Art "5 Flaschen” fällt - ebenso wie das Rechnen mit Zeichen (und Begriffen) für Werte (Abschnitt 5) - nicht unter den Begriff des Rechnens mit physikalischen Größen. Dadurch werden vermutlich immer noch viele zu der Meinung verleitet, daß man mit solchen Zeichen überhaupt nicht in eine mathematisch zulässige Gleichung eingehen dürfe. Die (zutreffende) gegenteilige Meinung konnte sich bis jetzt nicht allgemein durchsetzen. Dazu trug sicherlich bei, daß die Frage, was ein solches Zeichen bedeute, bis heute unterschiedlich beantwortet wird: eine «Menge», eine «Anzahl», eine «Anzahlart», eine «diskrete Größe», eine «Zählgröße», eine «Eigenschaft».

So schreibt zum Beispiel Emanuel Röhrl (1929 bis 1981) in /27/: «Die Schreibfigur "300 Flaschen" ist **kein Name** für eine Menge, sondern ist Name für eine Eigenschaft, nämlich für die **Eigenschaft**, aus 300 Flaschen zu bestehen» (Hervorhebungen von Röhrl). «Diese Eigenschaft ist durchaus vergleichbar mit der Eigenschaft eines Gegenstandes, 300 kg zu wiegen. In beiden Fällen handelt es sich um Quantitätseigenschaften.

Daß man nur selten mit «**Größenwerten**» (Hervorhebung von mir) «der Art "300 Flaschen" **rechnet**» (Hervorhebung von Röhrl) «hat einen ebenso nebensächlichen wie hinderlichen Grund. Die Quantitätseigenschaft, die den Wert "300 kg" annehmen kann, heißt Gewicht. Wie aber heißt die Größeneigenschaft, die den Wert "300 Flaschen" annehmen kann? Sollen wir sie "Flaschenanzahl" nennen? Nein, denn wer nach der Flaschenanzahl fragt, bekommt die Antwort "300" und nicht "300 Flaschen". Offenbar fehlt hier ein Name, und das hindert uns, von der gemeinten Größe zu sprechen und sie in Gleichungen auftreten zu lassen. Denn wer gibt einer Sache einen Formelbuchstaben, die sich nicht einmal nennen läßt?».

Um Mißverständnisse auszuschließen, sei folgendes gesagt: Röhrl bezeichnet im letzten Satz des Zitats mit dem Wort "Sache" nicht eine Sache in der hier festgelegten Bedeutung, sondern eine (physikalische) Größe; er beklagt nicht das Fehlen eines Namens für eine Sache in der hier festgelegten Bedeutung, sondern das Fehlen eines Namens für eine (von ihm gemeinte) physikalische Größe, also für eine Eigenschaft. - Eine Sache in der hier festgelegten Bedeutung bringt Röhrl überhaupt nicht in den Blick. Er sagt (in Wahrheit und pleonastisch), daß die Eigenschaft "300 Flaschen" die Eigenschaft sei, aus 300 Flaschen zu bestehen. Unabhängig von der pleonastischen Formulierung ist zu fragen: Wie kann eine Eigenschaft (und nicht eine Menge) aus 300 Flaschen bestehen?

Die Aussage Röhrls ist nur annehmbar, soweit sie sich gegen den Namen "Anzahl" wendet; ihre für Röhrl wesentliche Teilaussage, daß die Schriftfigur "300 Flaschen" nicht eine Menge, sondern eine Eigenschaft bezeichne, ist dagegen inakzeptabel. Der Name "300 Flaschen" bezeichnet nach allgemeinem Sprachempfinden (auf das sich Röhrl hinsichtlich der Anzahl zu Recht beruft) wohl doch eine Menge von Dingen in der hier festgelegten Bedeutung. Eine solche Menge ist - ebenso wie ein Wert und anders als eine physikalische Größe - **keine Quantität**, also **keine** (meß- oder zählbare) **Eigenschaft**; wohl aber ist sie - ebenso wie ein Wert und wie eine physikalische Größe - **quantifizierbar** und kann - ebenso wie ein Wert und wie eine physikalische Größe - als eine "**Quantifikable**" bezeichnet werden. Von den Werten und den physikalischen Größen unterscheidet sie sich dadurch, daß sie (quantitativ) zählbar ist und damit als eine "**Numerable**" bezeichnet werden kann, während eine physikalische Größe (quantitativ) **meßbar** und damit eine **Mensurable** und ein Wert (quantitativ) zuordenbar und damit eine **Attribuable** ist.

Es ist an dieser Stelle noch nicht zu prüfen, ob die eben verwendeten und zum Teil ungewohnten Namen allgemein annehmbar sind. Mir kommt es hier nur darauf an, das, was begrifflich zu unterscheiden ist, auch terminologisch klar zu unterscheiden.

Zu den Quantifikablen gehören auch die Zahlen (einschließlich der Anzahlen von Mengen) und alle Quantifikablen-Orientierungs-Kombinate. Diese sind zwar auch orientierbar, auf alle Fälle aber auch quantifizierbar.

Wegen der Anzahligkeit der Mengen können wir auch die Mengen als solche quantitativ erfassen und dürfen wir auch mit Zeichen für Mengen (und nicht nur mit Zeichen für Quantitätseigenschaften) in eine mathematische einwandfreie Rechnung eingehen.

Es ist zu beachten, daß das Rechnen mit Mengen etwas anderes ist als das erst im Abschnitt 7 in die Betrachtung einzubeziehende Rechnen mit Anzahlen von Mengen.

Wer sich nicht sicher war, daß man mit Mengen rechnen dürfe, aber doch meinte, mit Schriftfiguren der Art "300 Flaschen" rechnen zu dürfen, mußte die Mengen als «Zählgrößen» oder als «Quantitätseigenschaften» ⁚interpretieren⁚, versperrte sich damit aber nicht nur selber den Weg zur zutreffenden Einsicht, sondern wurde auch zu seltsamen Formulierungen gezwungen. So schrieb zum Beispiel Röhrl: «Auch ist es in vielen Situationen des täglichen Lebens unbestreitbar bequem, Gleichungen zu schreiben der Art

$$\frac{4\ \text{Zylinder}}{\text{Motor}} \bullet \frac{300\ \text{cm}^3}{\text{Zylinder}} = \frac{1200\ \text{cm}^3}{\text{Motor}}$$

Niemand kann jedoch ernsthaft erwägen, Größen mit der Einheit "Zylinder" oder "Motor" zu Basisgrößen des physikalischen Einheitensystems zu machen» /27/.

Röhrt möchte also mit Ausdrücken der Art "4 Zylinder" rechnen, meint aber zu Recht, daß man ein Zeichen der Art "4 Zylinder" nicht als ein Zeichen für eine physikalische Größe (oder gar für eine Basisgröße) behandeln könne. Er findet keinen Ausweg aus diesem Dilemma. - Hätte er sich nicht bemüht, das Rechnen mit solchen Zeichen als ein Rechnen mit physikalischen Größen zu ⁚interpretieren⁚, und hätte er statt dessen nur gefragt, ob man mit solchen Zeichen (wenn auch nicht im Rahmen des physikalischen Größenkalküls) nicht ebenfalls einfach rechnen dürfe, wäre er nicht in diese Klemme geraten.

Die Praxis zeigt, daß man mit Mengen (ebenso wie mit Werten) rechnen kann, und zwar problemlos, während beim Rechnen mit physikalischen Größen bestimmte Schwierigkeiten zu überwinden sind: Es ist nicht nur aus meßtechnischen Gründen nicht möglich, jede Urgröße als Urgröße zu messen; es ist auch aus mathematischen Gründen nicht möglich, in Rechnungen nur mit Zeichen für Urgrößen einzugehen; der Kalkül wäre nicht zu handhaben (Teil 1). Nur dieser meß- und rechentechnischen Schwierigkeiten wegen war es erforderlich, für das Rechnen mit Ausmaßgrößen einen besonderen Kalkül (eben den sogenannten Größenkalkül) zu entwickeln. Dieser macht das Umgehen mit physikalischen Größen dadurch praktikabel, daß man viele (genau: die meisten) Größen nicht als Urgrößen behandelt, sondern nur einige wenige (als "Basisgrößen eines Größensystems" bezeichnete), und daß man nur Zeichen für diese Basisgrößen sowie Zeichen für Potenzprodukte von Basisgrößen in die Rechnungen einsetzt und alle anderen Urgrößen durch «abgeleitete Größen des Größensystems» ersetzt (Teil 1).

Im Gegensatz zu der Notwendigkeit, verschiedenartige physikalische Größen auf verschiedenartige Weisen zu messen, und der Schwierigkeit, dabei auf Grenzen der Meßbarkeit zu stoßen, werden die Mengen aller Arten auf die gleiche Weise gezählt. Und während das Festlegen von präzisen Meßeinheiten eine schwierige wissenschaftlich-technische Aufgabe ist, an der viele nationale und internationale Gremien arbeiten, ist ein ausdrückliches Festlegen von (verschiedenartigen) Bezugsmengen nicht erforderlich: Die Bezugsmenge jeder Menge ist die jeweilige Einermenge, also die Teilmenge, die nur aus einem einzigen Element besteht. Mit der Mengenangabe "4 Zylinder" ist schon mit angegeben, daß die zur Zählung verwendete Bezugsmenge die Menge "1 Zylinder" ist. - Während man beim Messen eines Ausmaßes, zum Beispiel der Masse eines Steins, die beispielsweise 5 kg sein soll, dieses Ausmaß nur durch Vergleich mit dem gleichartigen Ausmaß eines Etalons intersubjektiv verständlich beschreiben kann (Der Stein ist 5-mal so schwer wie das Urkilogramm-Stück), man bei der Beschreibung der Masse des Steins also ein (denn Stein ˙fremdes˙) Etalonausnnaß verwenden, also gewissermaßen von außen her an den Stein ˙herantragen˙ muß, hat jede Menge ihre Bezugsmenge sozusagen immer ˙bei sich˙.

Es gibt so viele verschiedenartige Mengen, wie es verschiedenartige Mengenelemente gibt: Mengen von Motoren, von Bierflaschen, von Wassertropfen, von Schwefelkristallen, von S-Atomen, von S_8-Molekülen, von Einwohnern, von Telefonanschlüssen, von Glockenschlägen, von Umdrehungen, von Schwingungen, von Binärentscheidungen, von Begriffen, ...

Eben weil jede Mengenangabe (und jede Wertangabe) die Angabe der Bezugsmenge (des Bezugswertes) mit enthält, bereitet das Rechnen mit Mengen (und Werten) - im Gegensatz zu dem mit physikalischen Größen - keine Schwierigkeiten.

Auch in den Angaben von Basisgrößen [$m(1) = 5$ kg] wird die Bezugsgröße in eindeutiger Weise mit angegeben. Bei Ersatzgrößen [$W(1) = 5$ Nm; $M(1) = 5$ Nm] ist die mit angegebene Ersatz-Bezugsgröße (1 Nm) nur den Ersatzgrößen, nicht aber den mit diesen gemeinten Urgrößen (Arbeit W^{+}; Drehmoment M^{+}) eindeutig zugeordnet. Eben deshalb gibt es Schwierigkeiten, die nur durch die im ersten Teil herausgestellten pragmatischen Maßnahmen gemeistert werden.

Da jede Menge als diejenige Menge gezählt wird, die sie ist, besteht keine Notwendigkeit, die Mengen entsprechend den Größen in ˙Basismengen˙ und ˙abgeleitete Mengen˙ einzuteilen oder gar - was Röhrl selber für unmöglich hält - Einermengen von Zylindern und von Motoren zu «Basisgrößen eines physikalischen Einheitensystems» zu machen.

Es scheint, als wäre man in der Euphorie über die Leistungsfähigkeit des Größenkalküls in eigenartiger Weise über das Ziel hinausgeschossen: Man freute sich anscheinend nicht nur darüber, daß man mit physikalischen Größen dank des Größenkalküls ebenfalls mathematisch einwandfrei rechnen kann, sondern schien allmählich auch zu der Meinung gekommen zu sein, daß man nur mit physikalischen Größen rechnen dürfe. Das mit Erfolg praktizierte Rechnen mit Mengen scheint im Verlauf der Zeit für viele immer suspekter geworden zu sein, bis man in der Größenlehre anscheinend meinte, daß das Rechnen nnit Mengen nicht erlaubt beziehungsweise erst als zulässig nachzuweisen sei. - So kommt zum Beispiel Hilmar Wöhner in einer sonst gründlichen Untersuchung zu dem lapidaren Schluß, «daß die Frage, ob die Teilchenmenge in einer Größengleichung vorkommen könne, zu verneinen ist» /42/.

Wöhner spricht in dem damaligen Streit um das sogenannte Mol von "Teilchenmenge" und meint mit diesem Wort durchaus eine Menge von Teilchen in der hier gemeinten Bedeutung und nicht die Größe, die in der damaligen Diskussion ebenfalls als "Teilchenmenge" bezeichnet wurde und die heute "Stoffmenge" genannt wird.

Die Aussage Wöhners hätte zu weniger Mißverständnissen (auch in Wöhners eigenem Denken) geführt, wenn sie ergänzt worden wäre: Die Aussage, daß eine Menge nicht in einer Größengleichung vorkommen dürfe, besagt nicht, daß man mit Mengen überhaupt nicht rechnen dürfe: Man kann mit den (außerhalb des Zuständigkeitsbereichs des physikalischen Größenkalküls stehenden) Mengen nicht nur rechnen (was seit jeher geschieht); man darf es auch.

6.3.2. Als Argument gegen das Rechnen mit Mengen wird oft vorgebracht, daß man mit «Dingen» nicht in eine Rechnung eingehen könne, weil jedes Ding einzig und folglich nie mit einem anderen Ding identisch ist; es kann deshalb auch nicht in einer Gleichung mit einem anderen Ding gleichgesetzt werden; mathematische Gleichungen sind nur zwischen Eigenschaften und Relationen möglich, da nur diese identisch gleich sein können. Bei diesem Argument übersah man, daß ein Name, der auf eine reale Sache hinweist, auch einen Begriff bedeutet, und daß es für alle unter den gleichen Begriff fallenden realen Sachen nur einen einzigen Begriff gibt. Das Argument geht also am wesentlichen Sachverhalt vorbei: Für das Rechnen mit Zeichen (und Begriffen) für Mengen ist nicht von Belang, daß ein Zeichen der Art "5 Flaschen" auf ein reales Kollektiv hinweist und daß wir mit einem realen Kollektiv nicht in eine Gleichung eingehen können; das ist trivial; wesentlich ist, daß ein Zeichen, das eine Sache meint, auch als Zeichen für denjenigen Begriff fungiert, zu dem wir die realen Sachen idealisieren, und daß ein Zeichen der Art "5 Flaschen" in eine mathematische Gleichung nur in seiner Funktion als Zeichen für einen (mit sich selbst identischen) Begriff eingeht. Mit der Größe "5 m" kann man nicht deshalb rechnen, weil es eine meßbare Eigenschaft (und nicht eine Sache) bezeichnet, sondern weil alle Angaben "5 m" identisch sind. In entsprechender Weise kann man mit Zeichen für Mengen rechnen, weil zum Beispiel alle Angaben "5 Flaschen" identisch sind. Der umgekehrte Schluß, daß man mit dieser Angabe nicht rechnen dürfe, weil 5 Flaschen 5 Dinge und nicht eine Eigenschaft seien, verfehlt den wesentlichen Sachverhalt: Für die Frage des Rechnens ist - wie schon gesagt - allein von Belang, daß Mengen (und Werte) ebenso wie die physikalischen Größen quantifizierbar sind.

6.3.3. Die hier vertretene Auffassung, daß eine Schriftfigur der Art "5 Flaschen" keine Eigenschaft und damit auch keine physikalische Größe bezeichne, impliziert, daß sie auch keine «diskrete Größe» und keine «Zählgröße» bezeichnet. Und da sie keine Anzahl bezeichnet, bezeichnet sie auch keine «Anzahlart». - Gegen das letzte Wort spricht nicht nur, daß es mit dem (für den hier gemeinten Begriff) als ungeeignet bezeichneten Wort "Anzahl" zusammengesetzt ist, sondern auch das, was ich im Teil 1 zum Wort "Größenart" gesagt habe. Es gibt verschiedenartige Mengen (5 Flaschen, 5 Umdrehungen) und auch verschieden große (verschiedenzahlige) Mengen (5 Flaschen, 10 Flaschen); aber es gibt nicht verschiedenartige Anzahlen (verschiedene «Anzahlarten»), sondern nur verschieden große Anzahlen.

6.4. Weitere semantische Anmerkungen

Komparable. Die Größe einer Komparablen. Ausmaß, Wert, Anzahl

Die Quantifikablen (Zahlen, Mensurablen, Numerablen und Attribuablen) können verschieden groß sein und hinsichtlich ihrer Größe miteinander verglichen werden: 5 > 3, 3 m < 5 m, 3 DM = 300 DPf. Sie sind also vergleichbar (komparabel) und können deshalb auch als "Komparable" bezeichnet werden.

Ein Vergleichen ist bei **Mensurablen** nur möglich, wenn diese von gleicher Art sind; eine Schriftfigur der Art "5 kg > 3 m" ist sinnlos. Zahlen und Werte sind hinsichtlich eines Größenvergleichs immer von jeweils gleicher Art: 5 > 3, w(Sache 1) = w(Sache 2), 5 DM < 5 US-$. **Gleichartige Mengen** können hinsichtlich ihrer Größe ebenfalls problemlos miteinander verglichen werden: 5 Flaschen > 3 Flaschen (Die Menge "5 Flaschen" ist größer als die Menge "3 Flaschen"; 5 Flaschen sind mehr [Flaschen] als 3 Flaschen). Bei verschiedenartigen Mengen wirkt ein unmittelbarer Vergleich (5 Flaschen sind mehr als 3 Äpfel) mindestens seltsam. Man sollte deshalb beim Vergleichen solcher Mengen zu deren Anzahl übergehen: Die Anzahl der Flaschenmenge 1 ist größer als die (Anzahl) der Apfelmenge 2.

Der vorstehend verwendete Name "Größe" hat nicht die Bedeutung "physikalische Größe", sondern die Bedeutung "Größe einer physikalischen Größe". Wird an Stelle des Namens "physikalische Größe" der Name "Mensurable" oder - in umfassenderer Bedeutung - der Name "Komparable" verwendet, kann das Wort "Größe" in der Kalkülsprache in einer einzigen Bedeutung benutzt werden, und zwar in der, in der es auch in der Alltagssprache benutzt wird: "Größe einer Mensurablen", "Größe einer Komparablen". Der letzte Name ist Obername zu den Namen

- „Ausmaß einer Mensurablen",
- „Anzahl einer Menge (Numerablen)",
- „Größe einer Zahl" und
- „Größe eines Wertes".

Für die Größe von Zahlen sollte nicht das Wort "Zahlenwert" verwendet werden, weil das Wort "Wert" in der Kalkülsprache nur in einer einzigen, und zwar in seiner wirtschaftlich-finanziellen Bedeutung benutzt werden sollte. - Bei den hier gemeinten Werten wird oft von deren "Höhe" gesprochen. Auch dieses Wort sollte in der Kalkülsprache vermieden werden, und zwar der semantischen Konstanz wegen. - Es ist zu wünschen, daß für die Namen "Größe einer Zahl" und "Größe eines Wertes" noch eigene (den Namen "Ausmaß" und "Anzahl" entsprechende) Namen gefunden werden.

Wir unterscheiden bei den Komparablen also begrifflich-abstrakt deren Art und deren Größe, also die Eigenschaft als solche, zum Beispiel die Länge, und deren jeweils bestimmtes Ausmaß, zum Beispiel 5 m.

Das Reden sowohl von "Komparablen" wie auch von "Größen von Komparablen" braucht nicht zu irritieren. - Ebenso wie man nicht nur über Sachen reden kann (Die Strecke 1 ist 3 m lang), sondern auch über die komparablen (und anderen) Eigenschaften der Sachen (Die Länge der Strecke 1 ist 3 m), kann man bei komparablen Eigenschaften auch noch über deren Größe reden (Die Größe [Das Ausmaß] der Länge der Strecke 1 ist 3 m). Von sachlicher Bedeutung ist allein die Aussage über die Sache. Die Aussagen über die komparablen Eigenschaften und deren Größen, die den wesentlichen Aussagenteil "3 m" in gleicher Weise enthalten wie die Sachaussage, machen lediglich die Eigenschaften als solche beziehungsweise deren Größen zum grammatischen Subjekt einer Aussage und lenken damit die Aufmerksamkeit unmittelbar auf die Eigenschaften beziehungsweise deren Größen.

Das Wort "Größe" in seiner Bedeutung "Größe einer Komparablen" ist in der Kalkülsprache noch unentbehrlich, genügt aber - da es das Kleinsein mit umfaßt und da es deshalb auch kleine

Größen gibt - nicht den Anforderungen einer rationalen Fachsprache.

Das pseudopolare Gegensatzpaar "groß/klein" kann zwar mit Hilfe des grammatischen Steigerungspaares "größer/kleiner" und zusätzlicher Wörter („sehr [groß]", "winzig [klein]") sprachlich zu einem Vergleichsweise-groß-Sein und Vergleichsweise-klein-Sein relativiert werden; dadurch wird aber die (fachsprachliche) Irrationalität des Substantivs "Größe" (an dessen Stelle mit gleichem Recht das Substantiv "Kleine" verwendet werden könnte) nicht aufgehoben. - Für die Fachsprache bleibt deshalb das Desiderat, auch für den Namen "Größe" in der hier allein zur Benutzung empfohlenen Bedeutung - und ebenso für Namen wie "Länge" oder "Geschwindigkeit" - Namen zu finden, die sprachlich nicht einem der beiden Pseudopole (groß, lang, geschwind) zugeordnet sind, aber für alle Größen bis hin zum anderen Pseudopol (klein, kurz, langsam) gelten sollen. - Wie ein solches Desiderat erfüllt werden kann, wurde am Beispiel des Übergangs vom pseudopolaren Wortpaar "Fettreichtum/Fettarmut" zum Namen "Fettgehalt" beschrieben (Teil 2, Unterabschnitt 12.4).

6.5. Anmerkungen zum Rechnen mit Mengen

(1) Ich symbolisiere die Mengen in gleicher Weise wie Ausmaße (und Werte) mit einem kursiv geschriebenen Antiquabuchstaben, und zwar mit "*n*".

Dieser Buchstabe wird nach gültigen Normen für die sogenannte Stoffmenge benutzt. - Diese ist - wie im Abschnitt 8 noch zu besprechen sein wird - ein nicht benötigtes und hoffentlich bald wegfallendes Konstrukt.

Die sich im Deutschen für die Menge zunächst anbietenden Symbole "*M*" und "*m*" sind für das Drehmoment beziehungsweise für die Masse vergeben; und das Symbol "*N*" (von numerus) verwende ich für die erst im folgenden Abschnitt in die Betrachtung einzubeziehende Anzahl.

Mit dem Symbol "*n*" können wir die folgenden (noch unzureichend formulierten) Gleichungen schreiben:

(6.6) ⁚ n (Schwefelkristall 1) = 6 • 10^{23} S_8-Moleküle⁚,

(6.7) ⁚n (Schwefelkristall 1) = 48 • 10^{23} S-Atome⁚.

Diese entsprechen formal den Gleichungen

(6.8) m (Schwefelkristall 1) = 256 g und

(6.9) w (Schwefelkristall 1) = a DM.

Die Gleichungen 6.6 und 6.7 stehen zwischen Unkorrektheitszeichen, weil in ihnen für zwei verschiedenartige Mengen, nämlich für eine S_8- Menge und für eine S-Menge, ein und dasselbe Formelzeichen verwendet wird, nämlich "*n*". - Eine präzise Darstellung des gemeinten Sachverhalts ist nur mit Hilfe von Formelzeichen möglich, wie sie im ersten Teil dieser Untersuchung behelfsweise zum Beispiel für die Gleitgeschwindigkeit "v_G" (im Gegensatz zu andersartigen Geschwindigkeiten, wie der Reaktionsgeschwindigkeit "v_R") benutzt wurden. (Korrekt wäre die Verwendung verschiedener Buchstaben für die verschiedenartigen Größen, während die Verwendung verschiedener Indizes an ein und demselben Größenzeichen nur ein Behelf ist.) Der Index "G" im Symbol "v_G" ist Bestandteil des Größensymbols und fungiert nicht als Index, der auf eine Sache hinweist, die die angegebene Geschwindigkeit hat; das tut erst ein hinter das Symbol "v_G" gesetzter (tatsächlicher) Sachindex:

(6.10) $v_G(1) = 3$ m/s.

Ebenso wie man schon vor der Formulierung dieser Gleichung weiß, daß von einer Gleitgeschwindigkeit (und nicht zum Beispiel von einer Reaktionsgeschwindigkeit) gesprochen wird, weiß man auch schon vor der Formulierung der Gleichungen 6.6 und 6.7, ob von einer S_8-Menge oder von einer (andersartigen) S-Menge gesprochen wird. Deshalb ist man auch in der Lage, an Stelle dieser Gleichungen zutreffend formuliert zu schreiben:

(6.11) n_{S8} (Schwefelkristall 1) = 6 • 10^{23} S_8-Moleküle,

(6.12) n_S (Schwefelkristall 1) = 48 • 10^{23} S-Atome.

Erst diese Gleichungen, in denen "S_8" und "S" Bestandteile des Mengensymbols sind, entsprechen den korrekten Wortgleichungen "Die (ideale) S_8-Menge zu der der (reale) Schwefelkristall 1 idealisiert ist, ist 6 • 10^{23} S_8-Moleküle" und "Die (ideale) S-Menge, zu der der (reale) Schwefelkristall 1 idealisiert ist, ist 48 • 10^{23} S-Atome".

(2) Die Gleichungen 6.11 und 6.12 zeigen auch, daß wir eine Menge in gleicher Weise als ein Zweifaktorenprodukt darstellen,

(6.13) Menge = Mengenfaktor mal Bezugsmenge,

wie eine Ausmaß- oder eine Wertgröße:

(6.14) Ausmaß = Ausmaßfaktor mal Bezugsausmaß,

(6.15) Wert = Wertfaktor mal Bezugswert.

Es sollte nicht übersehen werden, daß in der Gleichung 6.13 die Anzahl in formal gleicher Weise als eine Malzahl (Multiplikationszahl) fungiert wie der Ausmaß- beziehungsweise Wertfaktor in den Gleichungen 6.14 und 6.15. Das belegt noch einmal, daß wir mit einer Menge in formal gleicher Weise wie mit einem Ausmaß oder einem Wert rechnen können und dürfen.

(3) Die bisherigen Ausführungen räumen vielleicht immer noch nicht die Bedenken aus, die gegen das Rechnen mit Mengen vorgebracht werden können. Selbst wer anerkennt,

- daß man gleichartige Mengen addieren kann (6.1),
- daß man Mengen in (gleichzahlige) Teilmengen einteilen kann,

(6.16) $\frac{\text{72 Flaschen}}{\text{24 Flaschen}} = 3$

72 Flaschen eingeteilt in Teilmengen zu je 24 Flaschen ergibt 3 (gleichzahlige) Teilmengen,

und daß man Mengen auf andersartige Mengen aufteilen kann,

(6.17) $\frac{\text{72 Flaschen}}{\text{3 Kästen}} = 24\,\frac{\text{Flaschen}}{\text{Kasten}}$

72 Flaschen (gleichzahlig) aufgeteilt auf 3 Kästen ergibt 24 Flaschen je Kasten,

kann noch der Meinung sein, daß man mit Mengen nicht in eine Multiplikation eingehen könne. Was sollte zum Beispiel das Produkt einer Menge und eines Ausmaßes sein (beispielsweise das Produkt "12 000 Einwohner mal 7 Tage[sdauern]" in der Gleichung 6.19) oder gar das Produkt zweier Mengen? - Zu dieser Frage sind eine grundsätzliche (3.1) und eine die Rechenpraxis betreffende Anmerkung (3.2) zu machen.

(3.1) Man kann nicht nur mit Mengen, sondern auch mit Ausmaßen und Werten nicht wirklich multiplizieren. - Wie im Teil 1 ausführlich besprochen wurde, kann man zum Beispiel auch eine

Kraft nicht mit einer Länge multiplizieren: Weder die Schriftfigur "*F* • *l*" noch die Schriftfigur "5 N • 3 m" sind Anweisungen für Operationen, die man tatsächlich durchführen könnte. Diese Produkte sind Konstrukte, die sich bei der Auswertung von Meßergebnissen (nur) mathematisch ergeben und die physikalisch zu interpretieren sind - und zwar oft in unterschiedlicher Weise, so in dem eben genannten Beispiel als Ersatzgröße für die Urgröße "Arbeit" und als Ersatzgröße für die Urgröße "Drehmoment". Aber man kann sowohl mit diesen Produkten wie auch mit deren Faktoren algebraisch weiter rechnen. Eine der wesentlichen Leistungen des Größenkalküls besteht ja gerade in dem Nachweis, daß man das kann und darf. Wir haben lediglich verlernt, uns über das Multiplizieren mit Zeichen für Ausmaße zu verwundern, und meinen nun, daß man (beispielsweise) die Kraft "5 N" mit der Länge "3 m" multiplizieren könne, daß das Ergebnis dieser Multiplikation das Ausmaß "15 Nm" sei und daß schließlich die Schriftfigur "15 Nm" das Ausmaß einer Arbeit oder eines Drehmoments (und nicht das Ausmaß einer Ersatzgröße für eine der beiden Urgrößen) darstelle. - Wer bezweifeln wollte, daß man mit Mengen rechnen dürfe, müßte auch das Rechnen mit physikalischen Größen grundsätzlich in Frage stellen.

(3.2) In der Praxis tritt ein Mengenzeichen als Faktor im allgemeinen nur auf, wenn ein Doppelquotient (mit einem Quotienten im Zähler) mathematisch formal in einen einfachen Quotienten (mit einem Produkt im Nenner) umgeformt wird, zum Beispiel in der folgenden Gleichungskette:

$$(6.18) \qquad v(\mathrm{W}) = \frac{\frac{V(\mathrm{W})}{n_{\mathrm{E}}}}{t} = \frac{\frac{V(\mathrm{W})}{t}}{n_{\mathrm{E}}} = \frac{V(\mathrm{W})}{n_{\mathrm{E}} \bullet t}$$

v(W): 'Wasserverbrauch' [auf eine Einwohnermenge "*n*," und eine Dauer "*t*" bezogenesVolumen "*V*(W)" einer Wasserportion].

Mit dieser Kette von Definitionsgleichungen ergibt sich zum Beispiel die folgende Kette von Bestimmungsgleichungen:

$$(6.19) \qquad \frac{\frac{20\,160\,000\ \mathrm{l}}{12\,000\ \mathit{Einwohner}}}{7\ \mathit{Tage(sdauern)}} = \frac{\frac{20\,160\,000\ \mathrm{l}}{7\ \mathit{Tage(sdauern)}}}{12\,000\ \mathit{Einwohner}} = \frac{20\,160\,000\ \mathrm{l}}{12\,000\ \mathit{Einwohner} \bullet 7\ \mathit{Tage(sdauern)}}$$

$$= \frac{240\ \mathrm{l}}{\mathit{Einwohner} \bullet \mathit{Tage(sdauer)}}$$

Das (schon früher erwähnte) Produkt "12 000 Einwohner mal 7 Tage(sdauern)" ist also in der Tat nicht eine Vorschrift, eine Menge mit einer Dauer zu multiplizieren, sondern ein bei der Umformung eines Doppelquotienten (der als solcher dem Verständnis keine Schwierigkeiten bereitet) in einen einfachen Quotienten sich nur mathematisch-formal ergebendes Produkt.

Bei der Umkehrung der Aufgabe, also bei der Berechnung des Volumens der Wasserportion aus dem Wasserverbrauch, der Personenmenge und der Dauer, bereitet die erforderliche Multiplikation ebenfalls keine Schwierigkeiten:

$$(6.20) \qquad V(\mathrm{W})_1 = \frac{240\ \mathrm{l}}{\mathit{Einwohner} \bullet \mathit{Tage(sdauern)}} \bullet 12\,000\ \mathit{Einwohner} \bullet 7\ \mathrm{Tage(sdauern)} = 20\,160\,000\ \mathrm{l}$$

Angaben der Art "240 1/(Einwohner mal Tag)" oder "1200 ml/Motor" werden in der Praxis benötigt und auch gennacht - allerdings von Personen, die meinen, daß man mit Zeichen für Mengen 'eigentlich' nicht in eine «Größengleichung» eingehen dürfe, nur mit einenn schlechten Gewissen. Solche Skrupel sind unangebracht.

(4) Um nicht nur von dinglichen Mengen zu sprechen, sei daran erinnert, daß es auch nicht ding-

liche Mengen gibt, zum Beispiel die Mengen von Umdrehungen, Schwingungen oder Binärentscheidungen. Auch solche Mengen können mit Ausmaßen zu rechenbaren Ausdrücken zusammengefaßt werden, zum Beispiel die Umdrehungsmenge "n_u" und die Drehdauer "c" zur Umdrehungsgeschwindigkeit "v_u":

(6.21) $v_u = n_u / t$ (Ersatzgrößendefinition),

(6.22) $v_u(1)$ = 500 Umdrehungen / 10 Minuten = 50 U/min (Bestimmungsgleichung),

oder die Schwingungsmenge "n_s" und die Schwingungsdauer "t" zur Frequenz (Schwingungsgeschwindigkeit) "f:

(6.23) $f = n_s$ / t

(6.24) $f(1)$ = 150 Schwingungen / 3 Sekunden = 50 S/s = 50 Hertz (50 Hz).

Mit der Zulassung von Gleichungen der Art 6.21 könnte der von Technikern wiederholt geäußerte (und von Größentheoretikern ebenso oft abgelehnte) Wunsch erfüllt werden, auch Einheiten der Art "1 U/min" zuzulassen. Daß dieser Wunsch nie erfüllt wurde, ist nur durch die Annahme zu verstehen, daß die Größentheoretiker die Mengen (zu Recht) nicht als physikalische Größen anerkannten, außerdem aber (zu Unrecht) meinten, daß man nur mit Größengleichungen rechnen dürfe, also nicht bedachten, daß das Größenrechnen nicht das einzige algebraische Rechnen ist.

Entsprechend günstig würde sich die Zulassung des Mengen-Größen-Kombinats "Schwingungsmenge/Dauer" auf das Problem "Frequenz f/Kreisfrequenz w" mit der unverständlichen Umrechnungsbeziehung

(6.25) $w = 2\pi \cdot f$

auswirken.

Da w und f durch die Zahl "2π" verknüpft sind, müßten sie Größen der gleichen Art sein; da man sie nicht «physikalisch sinnvoll» addieren beziehungsweise in einer Vergleichsrelation vergleichen kann, müßten sie Größen verschiedener Art sein (Teil 1).

(5) Da für das Volumen, das eine Gasportion beansprucht, und für den Druck, den sie auf die Begrenzungswände ausübt, nur die volumenbezogene Anzahl des gasigen Aggregats und dessen Thermie von Belang sind, nicht aber die Art der Moleküle (einschließlich der ˙einatomigen Moleküle˙ der Edelgase), kann das Gasgesetz auch für Molekülmengen (und nicht nur für Anzahlen von Molekülmengen) formuliert werden:

(6.26) $p \cdot V = k^* \cdot n \cdot T$.

Die Molekülmenge "n" könnte in der Mengeneinheit "1 Molekül" oder in der Mengeneinheit "$6 \cdot 10^{23}$ Moleküle" angegeben werden.

Warum die Zahl "$6\ 10^{23}$" eine so große Rolle spielt und wie man diese Zahl bestimmt, wird im Abschnitt 8 noch besprochen werden.

Würde die Einheit "1 Molekül" verwendet, würde die Konstante "k*" zweckmäßigerweise in der Form

(6.27) $k^* = 1{,}38 \cdot 10^{23}$ J / (K • Molekül) angegeben. Würde die Mengeneinheit "6,02 • 10^{23} Moleküle" verwendet, wäre die Konstante "k*" zweckmäßigerweise in der Form

(6.28) k^* = 8,31 J/(K • 6,02 • 10^{23} Moleküle)

anzugeben. - Die Konstante "k*" in 6.27 ist mit der Konstanten "k*" in 6.28 identisch:

(6.29) 1,38 • 10^{-23} J/(K • Molekül) = 8,31 J/(K • 6,02 • 10^{23} Moleküle).

Da das Rechnen mit Henadenmengen nicht in den Blick gekommen war (und da bei anderen Rechnungen oft verschiedenartige, also nicht addierbare Mengen zusammenzufassen sind), rechnete und rechnet man im allgemeinen nicht mit 6.26, sondern mit einer Beziehung, die mit Hilfe der (im folgenden Abschnitt in die Betrachtung einzubeziehenden) Anzahlen von Henadenmengen oder mit Hilfe der Stoffmenge formuliert wird.

(6) Wenn verschiedenartige Mengen zu einer Gesamtmenge zusammenzufassen sind,

(6.30) 5 Bierflaschen o 3 Weinflaschen => 8 Flaschen,

kann das nicht als eine mathematische Addition beschrieben werden,

(6.31) : 5 Bierflaschen + 3 Weinflaschen = 8 Flaschen:,

weil man verschiedenartige Mengen (verschieden «benannte Zahlen») nicht addieren kann.

Eine mathematisch korrekte Beschreibung einer solchen Zusammenfassung ist (nur) auf zwei Weisen möglich.

(6.1) Die Elemente der Teilmengen (Bierflaschen, Weinflaschen) werden durch Mengen eines höheren Abstraktionsgrades (Flaschen) ersetzt;

(6.32) 5 Bierflaschen => 5 Flaschen,

(6.33) 3 Weinflaschen => 3 Flaschen,

und die so erhaltenen Mengen des höheren Abstraktionsgrades werden addiert:

(6.34) 5 Flaschen + 3 Flaschen = 8 Flaschen.

Die Art der beiden Anfangsmengen geht bei diesem Verfahren notwendig verloren.

(6.2) Soll die Art der Anfangsmengen aus bestimmten Gründen (aber) erkennbar bleiben (siehe hierzu den folgenden Abschnitt), können (nicht die Mengen, sondern nur) die Anzahlen "N" der verschiedenartigen Mengen addiert werden:

(6.35) N(B-M 1) + N(W-M 2) = N(F-M 3):

Die Anzahl der Bierflaschenmenge und die Anzahl der Weinflaschenmenge ist gleich der Anzahl der Flaschenmenge:

(6.36) 5 + 3 = 8.

Diese Ausführungen zeigen, daß man nicht zu dem zurückgehen darf, was man üblicherweise als "Zahlenwertrechnen" bezeichnet; beim algebraischen Zeichen "N" ist vielmehr mit Hilfe eines Index' präzise zu kennzeichnen, von welchen Mengen die Anzahlen angegeben sind. Nur eine Gleichung der Art 6.35 enthält alle Informationen, die auch eine (vollständig formulierte) Größengleichung gibt:

(6.37) m(B-M 1) + m(W-M 2) = m(F-M 3),

(6.38) a kg + b kg = (a + b) kg.

6.6. Ausmaße und Werte als Quasimengen

6.6.1. Röhrl wollte mit seiner Aussage, daß Mengen in der hier gemeinten Bedeutung «Quantitätseigenschaften» seien, offenbar alles das unter einem gemeinsamen Namen zusammenfassen, was in den vermeintlichen Größenkalkül (in Wahrheit also in den algebraischen Kalkül) eingehen kann. Sein Versuch taugt aber nicht: Der Name "Quantitätseigenschaft" ist als Obername (auch) für Mengen ungeeignet, da Mengen keine (quantitativ erfaßbaren) Eigenschaften, sondern (quantitativ erfaßbare) Sachen (also nicht Quantitäten, sondern Quantifikable) sind.

Weitgehend unproblematisch wäre dagegen die entgegengesetzte Interpretation, nämlich die, daß (nicht Mengen Eigenschaften, sondern daß umgekehrt) die Ausmaße (Quasi-)Mengen seien, also die Interpretation, daß Ausmaße, die Kontinuumsgrößen sind, Quasi-Diskontinua seien. Die Elemente dieser (Quasi-)Mengen wären die jeweiligen Bezugsausmaße. - Würden wir eine Größe als Menge interpretieren, könnten wir zum Beispiel sagen, daß eine Länge von 5 m eine aus fünf 1-Meter-Elementen bestehende Metermenge sei.

Die an die Stelle einer Länge (in der Bedeutung einer physikalischen Größe) gesetzte Metermenge wäre keine ungeordnete, sondern eine in bestimmter Weise geordnete Menge: Die einzelnen 1-Meter-Elemente lägen auf einer Geraden lückenlos aneinander.

Wer damit einverstanden sein kann, daß man eine Länge von 5 m als eine aus fünf 1-Meter-Elementen bestehende Menge auffassen kann, wird vielleicht noch fragen, ob man auch die Länge "4,987 m" als eine Menge betrachten kann: Die Anzahl einer Menge ist ja immer eine Ganzzahl. Ein solches Bedenken wäre leicht zu beheben. Wer die Angabe "4,987 m" zu Recht, also meßtechnisch begründet macht, hat diese Länge auf 1 mm genau gemessen; wenn er statt "4987 mm" "4,987 m" schreibt, ordnet er der Länge nur eine andere Schriftfigur zu, ändert damit aber nichts daran, daß er eine ganzzahlige Millimetermenge gemessen hat. Die in Rede stehende Länge kann also nicht als eine ganzzahlige Metermenge, wohl aber als eine ganzzahlige Millimetermenge aufgefaßt werden. Beim Übergehen zur Dezimalschreibweise wird lediglich der Ausmaßfaktor der Länge durch 1000 dividiert und die Bezugslänge mit 1000 multipliziert, die Länge selbst also unverändert gelassen. - Wenn jemand die Länge noch präziser und die Angabe "4,9871 m" machen kann, hat er die Länge auf 1 Zehntausendstel-Meter genau bestimmt und der Menge der Zehntausendstel-Meter lediglich die Schriftfigur "4,9871 m" zugeordnet. Die Möglichkeit, eine Größe als eine Menge aufzufassen, wird durch keine noch so weit getriebene Verbesserung der sogenannten Meßgenauigkeit eingeschränkt.

Der Übergang von einem Symbol der Art "4987 mm" zu einem Symbol der Art "4,987 m" kann aus verschiedenen Gründen wünschenswert sein:

- Man möchte - wie weitgehend üblich - mit Ausmaßfaktoren arbeiten, die vor dem Dezimalkomma eine Zahl zwischen 1 und 999 haben,
- man möchte grundsätzlich nur SI-Einheiten verwenden, zu denen zum Beispiel die Einheit "1 m" gehört, nicht aber die gesetzlich ebenfalls zugelassene Einheit "1 mm",
- man möchte mehrere in unterschiedlich großen Einheiten gemessene Größen in einer Tabelle in ein und derselben Einheit angeben.

An dieser Stelle ist auch darauf hinzuweisen, daß mit Namen der Art "Anzahl der Voltmenge" (meistens zu "Voltzahl" verkürzt) von vielen Lehrern im einführenden Physikunterricht gearbeitet wird. Diese Lehrer greifen also den Namen "Volt" auf, den die Schüler im allgemeinen schon aus außerschulischen Kontexten kennen, und verschieben auf diese Weise die Einführung des schwierigen Begriffs "elektrische Spannung" auf eine spätere Unterrichtsstelle. - Ein Name wie "Voltzahl" sollte aber nicht verwendet werden, bevor geklärt ist, daß er an Stelle des korrekten Namens "Anzahl der Voltmenge" benutzt wird.

Das am Beispiel der Länge für Ausmaße aller Arten Gesagte gilt auch für Werte: auch ein Geldwert von 5 DM kann als eine aus fünf 1-DM-Elementen bestehende DM-Menge aufgefaßt werden.

Würden wir sowohl die originären Mengen wie auch die als Quasimengen aufgefaßten Ausmaße und Werte unter dem Namen "Menge" zusammenfassen, könnten wir sagen, daß auch der Kalkül für Ausmaße und Werte ein **Mengenkalkül** sei.

Die Interpretation der Größen als Mengen würde das Rechnen mit Größen in erhellender Weise auf das ursprünglichere Rechnen mit Mengen zurückführen, aber am tatsächlichen Rechnen keine Änderungen erfordern.

Es träte sogar an die Stelle der Invarianz einer Größe gegenüber einem Einheitenwechsel (1 cm und 1 m als Größeneinheiten aufgefaßt) die Invarianz einer Menge gegenüber einem Elementenwechsel, sofern - wie das bei den als Quasimengen aufgefaßten Größen der Fall ist - zwischen den verschiedenartigen, aber doch ˙verwandten˙ Elementen eine bestimmte quantitative Beziehung besteht (100 cm = 1 m; 1 cm und 1 m als Bezugsmengen aufgefaßt).

6.6.2. Die Auffassung des Rechnens mit Größen als eines Rechnens mit Mengen könnte auch verständlich machen, warum wir die Namen schon früher eingeführter Bezugsgrößen ebenso wie die Namen von Mengenelementen noch heute in die Mehrzahlform setzen (Stunde/ Stunden, Meile/Meilen, Krone/Kronen, ...), während wir das bei später eingeführten Einheiten nicht machen (1 Meter, 5 Meter; 1 Mark, 5 Mark, ...).

Früher setzten viele Autoren, zum Beispiel auch Wilhelm Oswald, auch Einheitennamen in die Pluralform, bei denen wir das heute nicht mehr machen («5 Gramme»).

Diese Pluralbildung scheint darauf hinzuweisen, daß man die Größen ursprünglich tatsächlich wie Mengen behandelte. - Darauf scheint auch unsere hartnäckig weiter verwendete Sprechweise "5 Meter je Sekunde" beziehungsweise "5 Meter pro Sekunde" (statt der normgemäßen Sprechweise "5 Meter durch Sekunde") hinzuweisen. Die übliche Sprechweise scheint nur bei Mengen angebracht zu sein („24 Flaschen je Kiste", "5 Äpfel pro Kind") und weist eben damit darauf hin, daß man ursprünglich wohl auch die Größen als Mengen betrachtete.

Die Interpretation der Größen als Mengen könnte auch auf eine ganz andere Frage eine Antwort finden lassen. - Während es für Mathematiker selbstverständlich ist, daß Zeichen der Art "Meter" und "m" gleichbedeutend sind wie die Zeichen "1 Meter" und "1 m",

(6.39) m = 1 m,

tritt bei Kalkülanwendern des öfteren die Frage auf, ob die Zeichen dieser beiden Arten nicht doch Verschiedenes bedeuten sollten. - In einem allgemeinen Mengenkalkül könnte man tatsächlich festlegen, daß "m" das Zeichen eines Mengenelements sei und "1 m" das Zeichen für eine Einermenge, also für eine aus einem einzigen Element "m" bestehende Menge. "5 m" wäre dann das Zeichen für eine aus 5 Elementen "m" bestehende Menge und "5 • 1 m" das Zeichen für 5 Mengen "1 m".

Zum Schluß dieses Unterabschnitts sei noch an folgendes erinnert: Wirft das Rechnen mit Mengen Licht auf das Rechnen mit Größen, so erhellt auch umgekehrt das Rechnen mit Größen das Rechnen mit Mengen. Seit der Klärung, daß man auch Produkte von Größen bilden kann (F•L; 5 N • 3 m) und daß man mit diesen Produkten und deren Faktoren rechnen kann und darf (auch wenn man die Produkte nicht wirklich ausmultiplizieren kann), braucht man keine Bedenken mehr zu haben, auch Produkte von Mengen oder von Mengen und Mensurablen zu bilden und mit diesen und deren Faktoren zu rechnen.

6.7. Vorgangssymbole in der Chemie und in der Mathematik

6.7.1. Reaktionsgleichungen der Art

(6.40) $6\ H_2 + 3\ O_2 = 6\ H_2O$

sind keine mathematischen Gleichungen zwischen Mengen von Molekülen oder - allgenneiner ausgedrückt - zwischen Mengen von Henaden. In ihnen werden das Gleichheitszeichen und das Pluszeichen in unzulässiger Weise verwendet. - Die Schriftfigur 6.40 besagt in unzutreffender, aber nicht zu leugnender Weise, daß die Summe von 6 H_2- Molekülen und 3 O_2-Molekülen das Gleiche sei wie 6 H_2O-Moleküle. Die genannten Moleküle sind aber von verschiedener Art, so daß weder die Summe der 6 H_2-Moleküle und der 3 O_2-Moleküle gebildet noch diese Summe den 6 H_2O-Molekülen gleich gesetzt werden kann. Und das gilt auch und wird sogar besonders deutlich, wenn man den Namen höheren Abstraktionsgrades "Henade" verwendet (siehe Unterabschnitt 6.5, Anmerkung 6.1). - Der Name "Reaktionsgleichung" läßt sich auch nicht dadurch rechtfertigen, daß man - wie üblich - sagt, daß auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens Symbole für jeweils gleich viele Atome der jeweils gleichen Art stehen. Diese Aussage ist zwar nicht falsch und hilft sogar beim Auffinden der zutreffenden Molekülmengenanzahlen; sie ist aber nicht das, was die Schriftfigur besagen soll, nämlich daß 6 H_2- und 3 O_2-Moleküle bei einer Synthesereaktion 6 H_2O-Moleküle bilden. Die Schriftfigur soll einen Vorgang beschreiben und ist nicht eine mathematische Gleichung, in der die Summe der Moleküle zweier verschiedener Arten den Molekülen einer dritten Art gleich gesetzt werden soll. - Es sind deshalb zwei Änderungen der Schrittfigur erforderlich.

(1) Das Gleichheitszeichen ist durch ein Zeichen zu ersetzen, das den Ablauf eines Vorgangs zum Ausdruck bringt. Als ein solches bürgert sich seit einigen Jahrzehnten allmählich der sogenannte Reaktionspfeil ein:

(6.41) $6\ H_2 + 3\ O_2 => 6\ H_2O$

6 H_2-Moleküle und 3 O_2-Moleküle bilden (bei einer chemischen) Reaktion 6 H_2O-Moleküle.

(2) Das Pluszeichen ist ebenfalls durch ein anderes Zeichen zu ersetzen. Der Ausdruck "6 H_2 + 3 O_2" ist keine Anweisung, eine (mathematisch nicht mögliche) Addition durchzuführen, sondern soll besagen, daß 6 H_2-Moleküle und 3 O_2-Moleküle (unter Bildung von 6 H_2O- Molekülen) miteinander reagieren. Das Pluszeichen in 6.40 und 6.41 ist kein Additionszeichen, sondern symbolisiert ein aufzählendes "und". Dessen Aufgabe besteht darin, zwei (oder mehr) grammatische Substantive zu einem einzigen grammatischen Subjekt (oder Objekt) zu verknüpfen: 6H_2- und 3 O_2-Moleküle bilden gemeinsam (zusammen) 6 H_20-Moleküle. Weder 6 H_2-Moleküle allein noch 3 O_2- Moleküle allein bilden 6 H_2O-Moleküle. "6 H_2 und 3 O_2" sind zusammen ein einziges Subjekt.

In anderen Fällen verknüpft das aufzählende "und" (nicht zwei Substantive zu einem einzigen Subjekt oder einem einzigen Objekt [HgO => Hg + 0], sondern) zwei Aussagen zu einer einzigen Aussage, zum Beispiel in dem Satz "Der Rhein und die Weser fließen in die Nordsee". Das grammatische Prädikat "fließen in die Nordsee" gilt (in der Singularform "fließt in die Nordsee") sowohl für das grammatische Subjekt "der Rhein" („Der Rhein fließt in die Nordsee") wie auch für das Subjekt "die Weser" („Die Weser fließt in die Nordsee"). Die Substantive "der Rhein" und "die Weser" sind also nicht zusammen ein einziges Subjekt, sondern zwei voneinander unabhängige Subjekte.

Als Zeichen für das aufzählende "und" kann das allgemeinste Verknüpfungszeichen der Mathematik (o) verwendet werden /31/:

(6.42) $6\ H_2 \circ 3\ O_2 \Rightarrow 6\ H_2O$:

6 H_2-Moleküle und 3 O_2-Moleküle reagieren miteinander unter Bildung von 6 H_2O-Molekülen.

Statt des Kringelzeichens könnte man auch das Zeichen "&" verwenden, das sich aus dem lateinischen Wort "et" (für "und") entwickelt hat.

Schließlich ist noch zu sagen, daß die Schriftfigur 6.42 nicht als "Reaktionsgleichung", sondern als "Reaktionssymbol" bezeichnet werden sollte. Sie symbolisiert einen Vorgang und nicht eine mathematische Gleichheit.

Während in der Chemie üblicherweise gesagt wird, "H" sei ein Atomsymbol, "H_2O" eine Molekülformel und "$2\ H_2 + O_2 = 2\ H_2O$" eine Reaktionsgleichung, sollte - da alle angeführten Schriftfiguren Symbole sind - in allen Fällen auch das Wort "Symbol" benutzt und nur durch kennzeichnende Attribute ergänzt werden: "H" ist ein Atomsymbol, "H_2O" ein Molekülsymbol und "$2\ H_2 \circ O_2 \Rightarrow 2\ H_2O$" ein Reaktionssymbol.

6.7.2. Daß sich die Chemiker nicht bemühen sollten, Vorgangsbeschreibungen zu mathematischen Gleichungen hochzustilisieren, sondern daß umgekehrt auch im Mathematikunterricht vorteilhaft mit Vorgangssymbolen gearbeitet werden kann, zeigen zum Beispiel Josef Lauter und Emanuel Röhrl in /11/ an der folgenden Aufgabe: «Eine Marktfrau geht zum Markte mit einem Korb voller Eier. Dem ersten Kunden verkauft sie die Hälfte ihrer Eier und noch ein Ei dazu. Dem zweiten Kunden verkauft sie abermals die Hälfte ihrer noch verbliebenen Eier und ein Ei dazu. Dem dritten Kunden verkauft sie abermals die Hälfte ihrer Eier, die sie noch hat, und ein Ei dazu. Nun hat sie noch 5 Eier übrig. Wieviele Eier waren ursprünglich im Korb?» - Solche Aufgaben wurden früher grundsätzlich auf eine Gleichung abgebildet. - Wenn die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Eiermenge mit „x" symbolisiert wird, kann - nicht ohne große Konzentration - die zutreffende Gleichung gefunden werden

(6.43)
$$x - (\frac{x}{2}+1) - \left[\frac{x-(\frac{x}{2}+1)}{2}+1\right] - \left\{\frac{x-(\frac{x}{2}+1)\left[\frac{x-(\frac{x}{2}+1)}{2}\right]}{2}+1\right\} = 5$$

Ich verzichte darauf, diese Gleichung hier nach x aufzulösen, und emp fehle dem Leser, die Lösung selbst zu finden (x = 54). Dieser wird dann sehen, wie sehr man aufpassen muß, um sich beim Bearbeiten der Brüche und der Klammerausdrücke nicht mit den Vorzeichen zu ver- tun. Vor allem aber kann er dann eindrücklich erleben, um wieviel ein facher man die Antwort auf die gestellte Frage finden kann , wenn man die Aufgabe nicht auf eine Gleichung abbildet, sondern einen Vorgang formalisiert, das heißt: durch eine Operationenfolge darstellt, zum Beispiel auf die folgende Weise:

(6.44)
$$\bigcirc \underset{:2}{\Rightarrow} \bigcirc \underset{-1}{\Rightarrow} \bigcirc \underset{:2}{\Rightarrow} \bigcirc \underset{-1}{\Rightarrow} \bigcirc \underset{:2}{\Rightarrow} \bigcirc \underset{-1}{\Rightarrow} 5$$

Zum Finden der Lösung wird die Operationsfolge umgekehrt und werden die jeweiligen Teillösungen in die Kreise (Körbe) eingetragen:

(6.45) $$54 \underset{\bullet\, 2}{\Leftarrow} 27 \underset{+1}{\Leftarrow} 26 \underset{\bullet\, 2}{\Leftarrow} 13 \underset{+1}{\Leftarrow} 12 \underset{\bullet\, 2}{\Leftarrow} 6 \underset{+1}{\Leftarrow} 5$$

Beim tatsächlichen Rechnen brauchen selbstverständlich nicht zwei Reihen von Kreisen gezeichnet zu werden: Die Operationszeichen der Rechenschritte können unter die Pfeile des Vorgangssymbols 6.44 und die jeweiligen Teilergebnisse in die Kreise dieses Symbols geschrieben werden.

Beim Aufstellen dieses Operationssymbols und beim Errechnen der Lösung treten nicht annähernd so große (und frustrierende) Schwierigkeiten auf wie beim Aufstellen und Lösen der Gleichung 6.43. Beim Aufstellen des Vorgangsymbols behalten die Schüler sowohl die der Aufgabe zu Grunde liegende Handlung wie auch den Rechenvorgang klar vor Augen: Das Symbol ist ja eine Abbildung des Eierverkaufs und auch eine Abbildung der Berechnung der ursprünglichen Eiermenge.

$\rightarrow$

V