5. Rechnen mit Werten

5.1. Einleitendes zum Rechnen mit Waren- und Geldwerten

Nach dem (bis jetzt allein betrachteten) Rechnen mit Ausmaßen und Ausmaß-Orientierungs-Kombinaten (Axoren) wenden wir uns jetzt dem Rechnen mit Wertgrößen zu.

Diese werden durch Gleichungen der Art

(5.1) w(1) = 20 DM

dargestellt: Der Wert einer Sache 1 ist 20 Deutsche Mark.

Das Symbol "w" wird ad hoc verwendet.

Der Wert ist keine meß- oder zählbare Eigenschaft, die einer Sache untrennbar zukäme. Er ist vielmehr eine nur in unserem Denken und Reden existierende Sache, also eine Gedankensache oder - ontologisch ausgedrückt - eine ideale Sache (siehe 6.2.2), die wir der zu bewertenden Sache nur zuordnen. So läßt zum Beispiel die Ware "100 kg Roggenmehl" nicht von sich aus erkennen, welchen Waren- oder Handelswert sie hat. Dieser wird vielmehr zwischen Handelspartnern vereinbart (gleichgültig ob diese Partner Einzelpersonen oder Institutionen sind). Unter verschiedenen wirtschaftlichen Bedingungen werden für eine Ware unterschiedliche Preise vereinbart.

Ebenso wie die Waren haben auch die Zahlungsmittel (Münzen und Banknoten), die nach dem Übergang von der Tauschwirtschaft zur Geldwirtschaft als allgemein einsetzbare ⁚Tauschwaren⁚ fungieren, nicht von sich aus einen ihnen untrennbar zukommenden Wert. - Den Bewertungen der Waren durch Handelspartner überlagern sich Schwankungen des Geldwertes selbst, so daß schon innerhalb der Wirtschaft eines einzelnen Staates je nach inflationären oder deflationären Tendenzen die Preise praktisch aller Waren steigen oder fallen.

Darüber hinaus stehen die Zahlungsmittel verschiedener Staaten nicht immer in der gleichen Werterelation: 100 DM sind nicht immer gleich 58,14 US-$. - Auch die Wechselkurse zwischen verschiedenen Währungen werden in hier nicht näher zu beschreibenden Verfahren zwischen verschiedenen Institutionen ⁚ausgehandelt⁚.

Ebenso wie die Sachen und ihre meßbaren Eigenschaften begrifflich und terminologisch zu unterscheiden sind, sind auch die Sachen - einschließlich der Zahlungsmittel - und die ihnen zugeordneten Werte begrifflich und terminologisch zu unterscheiden. Die Sache "1-Pfennig-Stück" ist etwas anderes als der dieser Sache zugeordnete Geldwert "1 Pfennig".

Da es beim Rechnen nur auf den idealen Geldwert ankommt, braucht man ein reales Geldmittel grundsätzlich überhaupt nicht zu benutzen: Man kann nicht nur von der Tauschwirtschaft zur Geldwirtschaft übergehen, sondern von dieser auch noch zu Verrechnungswirtschaft.

Wenn der Wert auch keine Eigenschaft ist, die einer Sache untrennbar zukäme, behandeln wir ihn in unserem Rechnen doch wie eine Eigenschaft. So ist zum Beispiel die Aussage "Die Sache 1 hat einen Wert von 3 DM" ganz analog zur Aussage "Die Strecke 2 hat eine Länge von 3 m" formuliert. Und wir rechnen mit Werten auch in völlig gleicher Weise wie mit meßbaren Eigenschaften. Die ideale Sache "Wert" ist ebenso quantifizierbar wie eine physikalische Größe und wird wohl gerade deshalb in unserem Rechnen wie ein Quasieigenschaft behandelt.

Im Alltag und auch schon in der Grundschule wird mit Werten ebenso selbstverständlich und problemlos gerechnet wie mit anderen «benannten Zahlen» . Schwierigkeiten treten erst später auf - aber nicht weil das Rechnen mit Geldwerten Probleme böte, sondern weil - wie zum Beispiel in der Zins- und Zinseszinsrechnung - nicht mit Geldwerten, sondern nur mit den «Zahlenwerten» der Geldwerte gerechnet wird. Die vorstehende Aussage, daß man mit Werten in gleicher Weise rechnen könne wie mit Ausmaßen, besagt also nicht, daß man mit Werten auch immer tatsächlich konsequent rechnet.

5.2. Anmerkungen zur Zinsrechnung

So werden zum Beispiel in der Schreibweise des Mathematik-Dudens /7/ die Zinsen "Z" eines Kapitals "K", das zum «Zinsfuß» "p" ausgeliehen wird, mit Hilfe der Formel

(5.2) «Z = (K • *p* • *t*) / 100 » /7/

berechnet. In diese Formel sind für "K", "*p*" und "*t*" nur Zahlen einzusetzen, und zwar für die physikalische Größe "*t*" der Ausmaßfaktor der in Jahren (und nicht zum Beispiel in Monaten) angegebenen Verzinsungsdauer. Wird zum Beispiel ein Kapital von 400 DM zum «Zinsfuß» von 4% ausgeliehen, werden die Zinsen für eine «Zeitdauer» (Verzinsungsdauer) von 3 Monaten (= 0,25 Jahre) gemäß Duden in der folgenden Weise berechnet:

(5.3) «Z = (400 • 4 • 0,25) / 100 = 4 DM » /7/

Wie den Mathematiklehrern bekannt ist, bereitet die Zinsrechnung den Schülern erhebliche Schwierigkeiten. Wie kann in der Mitte der Gleichungskette 5.3 eine Zahl und an deren Ende ein Geldwert stehen? Sind die am Anfang stehenden Zinsen "Z" nun eine Zahl oder ein Geldwert? Woher kommt das DM-Zeichen am Ende der Gleichungskette? Und was ist der Zinsfuß? Der Duden sagt «Der Zinsfuß *p* gibt an, wieviel Zinsen pro Jahr an den Verleiher zu zahlen sind». Soll der Zinsfuß - da an Zinsen 4 DM zu zahlen sind - der Geldwert "4 DM" sein? Doch wohl nicht. Ist der Zinsfuß tatsächlich die Zahl "4" (man vergleiche die Gleichungen 5.2 und 5.3), so daß der Nenner "100" in 5.3 zu Recht steht? Der Nichtfachmann würde sagen, daß ein Kapital zu einem Zinsfuß von 4% ausgeliehen werde, und nicht, daß es zu einem Zinsfuß von 4 ausgeliehen würde. Wenn *p* nicht 4, sondern 4% = 4/100 ist - woher kommt dann der Nenner "100" in 5.2 und 5.3?

Die Schüler können verstehen, daß die (hier ad hoc) als "Zinsfaktor" bezeichnete Verhältnisgröße

(5.4) p^* = Zinsen "Z" / Kapital "K"

von Belang ist und können dieses Verhältnis mühelos berechnen:

(5.5) $p_1^* = Z_1 / K_1 =$ 4 DM / 100 DM = 4%

Da in diesem Abschnitt zu zeigen ist, daß man mit Werten nicht nur in gleicher Weise rechnen kann, sondern auch rechnen darf wie mit Ausmaßen, schreibe ich die Symbole für die sachgebunden angegebenen Werte - im Gegensatz zum Duden - ebenso kursiv wie die der sachgebunden angegebenen Ausmaße.

Dagegen können die Schüler nicht verstehen, warum dieses Verhältnis mit 100 zu multiplizieren ist, um den Zinsfuß "p = 4" zu erhalten,

(5.6) $p_1 = p_1^* \cdot 100 = 4/100 \cdot 100 = 4$,

da die auf diese Weise erhaltene Zahl "p = 4" in der Gleichung 5.2 und in der Gleichung 5.3 doch wieder durch 100 dividiert wird.

Wird die Gleichung 5.2 durch die Gleichung

(5.7) $Z_1 = K_1 \bullet p_1{}^* \bullet t_1$

ersetzt, tritt der Nenner "100" nicht als eigenständiger Faktor auf (5.2), sondern als Teil des Zinsfaktors "p*“ (5.5).

Vom Standpunkt der Größenlehre aus betrachtet, fällt besonders auf, daß der Zinsfuß "p = 4" beziehungsweise der Zinsfaktor "p^* = 4/100" nur angibt, wie groß die «Jahreszinsen» sind, und daß in die Gleichung 5.2 deshalb der Ausmaßfaktor der in Jahren angegebenen Verzinsungsdauer (0,25) und nicht zum Beispiel der Ausmaßfaktor der in Monaten angegebenen Dauer (3) einzusetzen ist. Die Verzinsungsdauer ist (als Dauer) eine physikalische Größe und als solche gegenüber einem Einheitenwechsel invariant. - Es ist nicht schwer, auch in der Zinsrechnung mit einer einheiteninvarianten Gleichung zu arbeiten: Man braucht nur - statt mit der Größe "p*" - mit der Größe

(5.8) $f_1 = p_1{}^* / t_1 \left(= \dfrac{Z_1 / K_1}{t_1}\right)$

zu arbeiten, in unserem Beispiel also mit dem Verzinsungsfaktor

(5.9) $f_1 = p_1{}^* / t_1 = \dfrac{4 / 100}{\mathrm{a}}$

Der Name "Verzinsungsfaktor" und das Symbol "f" werden ad hoc verwendet.

Mit einer Gleichung, in der diese Größe verwendet wird, kann man größenrichtig rechnen:

(5.10) $Z_\mathrm{i} = K_\mathrm{i} \bullet f_\mathrm{i} \bullet t_\mathrm{i}$

So ergibt sich in unserem Beispiel der zutreffende Wert "4 DM", gleichgültig, ob wir die Verzinsungsdauer in Jahren oder in Monaten einsetzen:

(5.11) $Z_1 = 400 \text{ DM} \bullet \dfrac{4 / 100}{\mathrm{a}} \bullet 0{,}25 \text{ a} = 4 \text{ DM},$

(5.12) $Z_1 = 400 \text{ DM} \bullet \dfrac{4 / 100}{\mathrm{a}} \bullet 3 \text{ men} = 16 \text{ DM} \bullet \dfrac{3 \text{ men}}{12 \text{ men}} = 4 \text{ DM}.$

Bei Verwendung der Gleichung 5.10 [in der "f_i" eine durch ein Zweifaktorenprodukt darstellbare Größe (0,04/a^{-1}) und nicht einen «Zahlenwert» allein (4/100) symbolisiert] ist es auch nicht erforderlich, den Verzinsungsfaktor ausschließlich in der Einheit " $\frac{4/100}{\mathrm{a}}$ " (1 Prozent pro Jahr) anzugeben; dieser kann auch in der Einheit "$\frac{1/1000}{\mathrm{a}}$“ (1 Promille pro Jahr) in die Gleichung eingesetzt werden:

(5.13) $Z_1 = 400 \text{ DM} \bullet \dfrac{40 / 1000}{\mathrm{a}} \bullet 3 \text{ men} = 16 \text{ DM} \bullet \dfrac{3 \text{ men}}{12 \text{ men}} = 4 \text{ DM}.$

Bei Verwendung der Gleichung 5.10 kann man alle Größen in denjenigen Einheiten einsetzen, in denen sie angegeben sind; man braucht also nicht zu überlegen, welche «Zahlenwerte» einzusetzen seien, und ist damit einer Fehlerquelle weniger ausgesetzt; wie die Einheiten (zum Beispiel ˙Jahre˙ und ˙Monate˙) gegeneinander zu verrechnen sind, ergibt sich später von selbst (5.12).

Wollen wir nicht nur mit Bestimmungsgleichungen arbeiten, sondern auch die Gesetzmäßigkeit als solche zutreffend darstellen, ist eine Gesetzesproportionalität zu formulieren:

(5.14) $Z \sim K \cdot f \cdot t$:

Die Zinsen ändern sich proportional mit dem Kapital, dem Verzinsungsfaktor und der Verzinsungsdauer.

Diese Proportionalität verstehen die Schüler ohne Schwierigkeiten; und sie ist die einzige, die sich die Schüler zu merken brauchen: Aus ihr können die Bestimmungsgleichungen für alle vorkommenden Größen mühelos formuliert werden:

(5.15) $Z_i = K_i \cdot f_i \cdot t_i$,

(5.16) $K_i = \frac{Z_i}{f_i \cdot t_i}$,

(5.17) $f_i = \frac{Z_i}{Ki \cdot t_i}$,

(5.18) $t_i = \frac{Z_i}{f_i \cdot K_i}$,

Es ist nicht erforderlich, auch auf die Zinseszinsrechnung einzugehen, da sich in dieser an der Kalkülgemäßheit des Rechnens mit Werten nichts ändert.

Das vorstehende Beispiel zeigt nicht nur, daß man mit Werten in gleicher Weise rechnen kann wie mit Ausmaßen; es zeigt auch, daß man mit Werten sogar so rechnen muß wie mit Ausmaßen, da Werte und Ausmaße oft in einem mathematischen Ausdruck zusammengefaßt sind. So ist beispielsweise der Verzinsungsfaktor ein auf eine Dauer bezogenes Geldwertverhältnis,

(5.19) $f_i = \frac{Z_i / K_i}{t_i}$

also eine Größe, in der zwei Werte und ein Größenausmaß miteinander verbunden sind.

5.3. Gemeinsamkeiten des Rechnens mit Werten und des Rechnens mit Ausmaßen

Daß man mit Werten, die nur in unserem Denken existierende Sachen sind und die anderen Sachen nur zugesprochen werden, in gleicher Weise rechnen kann wie mit Ausmaßen, die die Dinge haben, zeigen die vielen Gemeinsamkeiten von Werten und Ausmaßen.

- Zwei Werte von 20 DM sind ebenso identisch gleich wie zwei Längen von 20 m.
- Werte werden in gleicher Weise in verschiedenen Bezugswerten angegeben (zum Beispiel in DM oder in US-$), so wie Ausmaße in verschiedenen Bezugsausmaßen angegeben werden (zum Beispiel in Metern oder in US-Yards).
- Während die Umrechnungsbeziehungen zwischen Längen auf Grund der Definitionen der jeweiligen Bezugslängen normativ festliegen (1 US-Yard = 0,914 401 83 m; 1 britisches Yard = 0,914 399 21 m), ändern sich die Umrechnungsbeziehungen zwischen verschiedenen Währungen mit jeder (wirtschaftlich bedingten) Neubewertung der Währungen.
- Die Umrechnungsbeziehungen zwischen Werten einerseits und die zwischen Ausmaßen andererseits sind in gleicher Weise unveränderlich (1DM = 100 Dpf, 1 m = 100 cm).
- Werte und Ausmaße können in gleicher Weise in einer Werte- beziehungsweise Ausmaßrelation miteinander verglichen werden (5 DM > 3 DM; 5 m > 3 m).
- Werte und Ausmaße werden in gleicher Weise durch Zweifaktorenprodukte dargestellt:
  (5.20) Wert = Wertfaktor mal Bezugswert,
  (5.21) w(1) = 3 • DM (= 3 DM);
  (5.22) Ausmaß = Ausmaßfaktor mal Bezugsausmaß,

(5.23) $l(1) = 3 \cdot m$ (= 3 m).

- Werte und Ausmaße können in gleicher Weise einen Sinn haben, also polar sein. Vermögenswerte und Schuldenwerte haben entgegengesetzte Sinne.
- Der Sinn wird weder bei den Werten noch bei den Ausmaßen mathematisch manifest.
- Die Wert-Orientierungs-Kombinate und die Ausmaß-Orientierungs-Kombinate sind in gleicher Weise als Dreifaktorenprodukte aufzufassen und darzustellen:
  (5.24) w(1) = -3000 DM;
  (5.25) $l(1)$ = -3 m.

Da die axiomatische Grundlegung des Rechnens mit physikalischen Größen in innermathematischen Untersuchungen weitestgehend gelungen ist, ist zu hoffen, daß auch beim monetären Rechnen, das im Mathematikunterricht durchgeführt wird, in absehbarer Zeit mit den Werten selbst (und nicht ausschließlich mit deren «Zahlenwerten») gerechnet werden wird. Wenn Symbole der Art "K" und "Z" nicht Zahlen (400, 4), sondern Werte (400 DM, 4 DM) bedeuten, werden die Schüler erheblich sicherer als jetzt auch mit Zins- und Zinseszinsaufgaben umgehen können. - Nachdem in den Naturwissenschaften und in der Technik der Übergang vom Rechnen mit «Zahlenwerten» zum Rechnen mit Größen gelungen ist, sollte auch im Mathematikunterricht der Übergang vom Rechnen mit den «Zahlenwerten» von Werten zum Rechnen mit den Werten selbst gelingen.

5.4. Rechnen mit ausmaßbezogenen Werten und mit wertbezogenen Ausmaßen

Man kann nicht nur mit Ausmaßen im naturwissenschaftlich-technischen Bereich einerseits und mit Werten im wirtschaftlich-finanziellen Bereich andererseits rechnen; man kann und muß (meßbare) Ausmaße und (zuordenbare) Werte oft zu einem einzigen mathematischen Ausdruck, nämlich zu einem ausmaßbezogenen Wert oder zu einem wertbezogenen Ausmaß, zusammenfassen und mit Werten, Ausmaßen, ausmaßbezogenen Werten und wertbezogenen Ausmaßen in eine Gleichung eingehen. Das geschah schon in der Gleichung 5.8; und das geschieht in unzähligen weiteren Fällen.

So können zum Beispiel

- die auf eine Dauer bezogenen Verpflegungskosten (VK) durch Gleichungen der Art
  (5.26) VK(1) = 600 DM/Monat

erfaßt werden oder

- die auf die Länge einer Fahrstrecke bezogenen Betriebskosten (BK) für einen Kraftwagen durch Gleichungen der Art
  (5.27) BK(1) = 85 Dpf/km

oder - um auch ein Beispiel zu erwähnen, bei dem ein Geldwert im Nenner eines Quotienten steht -

- die auf die Telefongebühren (TG) bezogene Sprechdauer (t) durch Gleichungen der Art
  (5.28) $t/TG(1)$ = 5 min/DM.

Das Rechnen mit solchen Größen ist völlig problemlos. So ergibt sich zum Beispiel für die Kosten (*WK*) der von einem Elektrizitätswerk gelieferten elektrischen Energie (*W*) mit Hilfe eines Energiekostenfaktors

(5.29) $e = WK/W$,
für $W(1)$ = 800 kWh und $e(1)$ = 0,14 DM/kWh:

(5.30) $WK(1) = e(1) \cdot W(1)$ = (0,14 DM/kWh) • 800 kWh = 112 DM.

Durch das Einbeziehen der Werte in das wissenschaftlich-technisch-wirtschaftlich-finanzielle Rechnen werden die Werte nicht zu physikalischen Größen (Ausmaßen). Der Kalkül, der auf Werte angewendet wird, fällt deshalb nicht unter den Begriff dessen, was man bis jetzt als "Größenkalkül" bezeichnet. Er ist vielmehr Teil eines allgemeineren algebraischen Kalküls. Dieser (und nicht der bisherige Größenkalkül) kann sowohl auf meßbare Eigenschaften wie auch auf zuordenbare Werte (und auch auf Mengen; siehe den Abschnitt 6) angewendet werden. Der übliche Größenkalkül wurde wegen besonderer (im Abschnitt 6 noch einmal zu nennender) Schwierigkeiten, die beim Rechnen mit physikalischen Größen auftreten, entwickelt und betrifft nur das Rechnen mit diesen Größen. Das heißt aber nicht, daß man nur mit solchen Größen kalkülgemäß rechnen könne und dürfe.

Warum man mit Werten ebenso wie mit physikalischen Größen rechnen kann und in welcher Bedeutung der Name "Wert" und noch weitere Namen verwendet werden sollten, werde ich erst näher besprechen, wenn im folgenden Abschnitt auch das Rechnen mit Mengen behandelt sein wird.

Nach dem Lesen dieses Abschnitts dürfte deutlicher sein, warum ich im ersten Teil der Gesamtuntersuchung das Wort "Größenwert" (und auch das Wort "Zahlenwert") als semantisch ungeeignet bezeichnete. Da wir (tatsächlich) Werte im algebraischen Kalkül behandeln, sollte das Wort "Wert" nicht auch in Bezeichnungen der Art "Größenwert" (statt "Größenausmaß") verwendet werden.

$\rightarrow$

V