

4. Beispiele für das Ermitteln von Gesetzesproportionalitäten

4.1. Allgemeines zum Linearisieren von Gleichungen und Proportionalitäten

Zu einem verständigen Umgehen mit Gesetzesproportionalitäten gehört auch deren verständiges Ableiten aus Meßergebnissen. Dieses kann und sollte - um den Unterricht abwechslungsreich durchzuführen und dabei die Flexibilität des Denkens der Schüler zu schulen - auf verschiedene Weise erfolgen. Das sollte aber nicht versäumen lassen, den Schülern bewußt zu machen, daß es auch ein immer anwendbares Ableitungsverfahren gibt, nämlich das sogenannte Linearisieren von Gleichungen /29/. Bei diesem werden die Meßergebnisse als Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet, werden auf der Grundlage dieser Punkte Kurven gezeichnet, um die die Punkte möglichst wenig streuen, und werden schließlich Gleichungen (Proportionalitäten) gesucht, die diesen Kurven zugeordnet werden können. Das Verfahren setzt also voraus, daß die Schüler einige Kurven und die diesen zugeordneten Proportionalitäten kennen, und zwar vor allem die folgenden:

- die Gerade, die durch den Nullpunkt eines x-y-Koordinatensystems geht und die ihr zugeordnete Proportionalität

$$(4.1.) \quad y \sim m \cdot x \text{ [ausführlicher: } y(x) = m \cdot x \text{];}$$

in dieser ist

$$(4.2.) \quad m = (\Delta y)_i / (\Delta x)_i$$

ein Maß dafür, wie schnell sich y mit x ändert; dieser Quotient wird als "Anstiegsfaktor" bezeichnet;

- die Gerade, die die Ordinatenachse im Punkt " $y_0 = n$ " schneidet und die ihr zugeordnete Proportionalität

$$(4.3.) \quad y \sim m \cdot x + n;$$

- die Parabel, die symmetrisch zur y-Achse liegt, und die ihr zugeordnete Proportionalität

$$(4.4.) \quad y \sim k_5 \cdot x^2;$$

- die Hyperbel, die sich asymptotisch den Koordinatenachsen nähert, und die ihr zugeordnete Proportionalität

$$(4.5.) \quad y \sim k_6 \cdot 1/x (= k_6 \cdot x^{-1}).$$

Das Linearisieren von Proportionalitäten (Kurvengleichungen) besteht nun darin, daß man von der gemessenen Argumentengröße beim Ableiten des gesuchten Gesetzes zu einer anderen, sich mathematisch ergebenden Argumentengröße übergeht, zum Beispiel im Falle des im folgenden noch abzuleitenden Boyle-Mariotte-Gesetzes,

$$(4.6.) \quad V \sim k_2 \cdot 1/p \text{ (Abschnitt 3)}$$

vom gemessenen Druck " p " [$V = f(p)$] zum mathematisch sich ergebenden Quotienten " $1/p$ " [$V = f(1/p)$]

Wird $1/p$ als (neue) Argumentengröße betrachtet, ist 4.6 die Proportionalität einer Geraden, die in einem $1/p - V$ -Koordinatensystem durch den Koordinatennullpunkt geht (siehe die Proportionalität 4.1). Wir ordnen deshalb der Formel 4.6 nicht die Verbalaussage zu "Das Volumen ändert sich umgekehrt proportional mit dem Druck", sondern die Aussage "Das Volumen ändert sich proportional mit der Kehrgöße des Drucks". - Hängt eine Funktionsgröße von mehreren

Argumentengrößen ab, werden bei der Gesetzesableitung alle gemessenen Argumentengrößen, mit denen die Funktionsgröße nicht in einer Linearitätsbeziehung steht, durch solche Argumentengrößen ersetzt, mit denen sie sich linear ändert. - Das Linearisieren macht damit auch deutlich, daß es sinnvoll und zulässig ist, die Gesetzesaussagen ganz allgemein als "Gesetzesproportionalitäten" zu bezeichnen.

Die neue Argumentengröße " $1/p$ " wird aus dem folgenden Grund eingeführt. - Wird das Volumen " V " in einem p - V -Koordinatensystem über dem Druck " p " abgetragen (Bild 4.3), ergibt sich eine Kurve, von der man - allein auf Grund des Augenscheins - nicht mit Sicherheit sagen kann, ob sie ein Stück einer Hyperbel oder ein Stück einer Parabel ist, ob ihr also die Hyperbelproportionalität " $V \sim k_2 \cdot 1/p$ " oder eine Parabelproportionalität zuzuordnen ist.

Wird dagegen das Volumen " V " in einem $1/p$ - V -Koordinatensystem über der Kehrgroße des Druckes " $1/p$ " abgetragen, ergibt sich - wenn die vermutete Beziehung 4.6 zutrifft - eine Linie, die zweifelsfrei als eine (durch den Nullpunkt des Koordinatensystems verlaufende) Gerade zu erkennen ist und der deshalb jetzt die als zutreffend vermutete Proportionalität 4.6 endgültig zugeordnet werden kann (Bild 4.4).

Hätte sich beim Abtragen von V über $1/p$ keine Gerade ergeben, wäre der Ansatz 4.6 unzutreffend gewesen und müßte man das Verfahren mit neuen Ansätzen wiederholen, bis sich eine Gerade ergäbe und mit dieser die zutreffende Proportionalität gefunden wäre.

Im Unterricht wird man dieses Verfahren schrittweise an jeweils geeigneten Unterrichtsstellen bewußt machen. Und man wird mit diesem Bewußtmachen schon bei der Untersuchung von Vorgängen beginnen, bei denen eine Linearität von vornherein besteht und deshalb ein Linearisieren gar nicht erst erforderlich ist (Unterabschnitt 4.2). Auch im zweiten Schritt wird man noch Vorgänge untersuchen, die durch Geradenproportionalitäten beschrieben werden, aber durch solche der Art 4.3, also durch solche, in denen auch eine additive Konstante, also ein sogenanntes Absolutglied vorkommt (Unterabschnitt 4.3). Das eigentliche Linearisieren wird erst bei der Untersuchung von Vorgängen besprochen, bei denen sich die Funktionsgröße nicht linear mit gemessenen Argumentengrößen ändert (Unterabschnitte 4.4 bis 4.6).

4.2. Die Verlängerung einer Feder in Abhängigkeit von der belastenden Kraft Das Gesetz von Hooke

4.2.1. Ein Vorgang, der durch eine Proportionalität der Art 4.1 beschrieben wird, ist zum Beispiel die Verlängerung (die Zunahme der Längendifferenz)

$$(4.7) \quad \Delta l = l_E - l_A$$

l_E : Länge bei Belastung [Endlänge]; l_A : Länge ohne Belastung [Anfangslänge]

einer Feder bei Belastungen (unterhalb der Elastizitätsgrenze). Diese wird im Unterricht schon früh behandelt.

Häufiger als die Verlängerung wird in der Praxis die sogenannte Dehnung benutzt:

$$(4.8) \quad \varepsilon = \Delta l / l_A.$$

Da sich diese - wegen der Konstanz von l_A - proportional mit der Verlängerung ändert, können mit ihr die folgenden Überlegungen in völlig entsprechender Weise durchgeführt werden.

Eine Versuchsreihe mit einer bestimmten Schraubenfeder und mit den belastenden Kräften " F_i " liefern die in der Tabelle 4.1 notierten Verlängerungen " $(\Delta l)_i$ ".

1	2	3
Versuchsnummer	F_i in N	(Δl) in cm
1	50	1,6
2	100	3,2
3	150	4,8
4	200	6,4
5	300	9,6
6	400	12,8

Tabelle 4.1. Zur Auffindung des Gesetzes von Hooke

Die Schüler erkennen ohne Schwierigkeit, daß zwischen den Ausmaßen der Kräfte und denen der Verlängerungen eine Je-größer-desto-größer-Beziehung besteht, und zwar eine lineare (proportionale): Bei einer Ver-n-fachung der belastenden Kraft ver-n-facht sich auch die Verlängerung:

$$(4.9) \quad F_i = n \cdot F_1 \Rightarrow (\Delta l)_i = n \cdot (\Delta l)_1 \quad (n: \text{reelle Zahl}),$$

$$(4.10) \quad 150 \text{ N} = 3 \cdot 50 \text{ N} \Rightarrow 4,8 \text{ cm} = 3 \cdot 1,6 \text{ cm} \quad (\text{Zeilen 3 und 1}). \text{ Es gilt also die Proportion}$$

$$(4.11) \quad (\Delta l)_i : (\Delta l)_j = F_i : F_j$$

$$(4.12) \quad 4,8 \text{ cm} : 1,6 \text{ cm} = 150 \text{ N} : 50 \text{ N} (= 3 : 1):$$

Die Verlängerungen der Federn verhalten sich wie die belastenden Kräfte.

Will man eine Gleichung finden, die nicht besagt, daß das Verhältnis zweier Verlängerungen gleich groß ist wie das Verhältnis zweier Kräfte, sondern die besagt, in welcher Weise die Verlängerung von der belastenden Kraft abhängt, muß man von der Verhältnisgleichung 4.11 zu einer Funktionsgleichung übergehen und dazu - wie im Abschnitt 1 besprochen - nicht die Größenverhältnisse " $(\Delta l)_i : (\Delta l)_j$ " und " $F_i : F_j$ " bilden, sondern die Quotienten " $(\Delta l)_i / F_i$ ". Es ergibt sich:

$$(4.13) \quad \frac{(\Delta l)_1}{F_1} = \frac{(\Delta l)_2}{F_2} = \frac{(\Delta l)_3}{F_3} = \dots = \frac{(\Delta l)_i}{F_i} = 0,032 \frac{\text{cm}}{\text{N}} = k_7$$

Die Größe " k_7 " kann als Elastizitätskoeffizient interpretiert werden. Sie ist nicht die in der Wissenschaft und in der Technik benutzte, für unsere Betrachtung aber nicht erforderliche Größe "Elastizitätsmodul".

Der Gleichungskette 4.13 kann die Gleichung

$$(4.14) \quad (\Delta l)_i = k_7 \cdot F_i$$

entnommen werden. Und diese kann in eine Gesetzesproportionalität umgeformt werden,

$$(4.15) \quad (\Delta l) \sim k_7 \cdot F:$$

Die Verlängerung der Feder ändert sich proportional mit der belastenden Kraft.

Diese Proportionalität ist ein Sondergesetz, das nur für eine ganz bestimmte Feder gilt. Wird mit verschiedenen langen, aber sonst gleichartigen Federn experimentiert, zeigt sich, daß sich die Federn auch proportional mit ihren Längen ändern: Verlängert sich eine Feder der Länge " l_1 " bei einer bestimmten Belastung um ein bestimmtes Ausmaß, verlängert sich eine Feder der Länge " $2 \cdot l_1$ " bei gleicher Belastung um ein doppelt so großes Ausmaß. Die Größe " k_7 " ist also das Produkt zweier Faktoren:

$$(4.16) \quad (\Delta l) \sim k_8 \cdot l \cdot F.$$

Diese Proportionalität hat eine allgemeinere Gültigkeit als 4.15.

Werden Verlängerungsversuche mit verschiedenstofflichen Metalldrähten durchgeführt, die auf Grund ihrer Elastizität durchaus (auch) als Federn fungieren können, erkennt man, daß die Größe " k_8 " in Faktoren zerlegt werden kann, von denen einer den Federstoff kennzeichnet. Die bei diesen Versuchen zu ermittelnde Proportionalität ist also noch allgemeiner gültig als 4.16.

4.2.2. Im Hinblick auf die Erarbeitung der allgemein anwendbaren Linearisierung von Gleichungen sollte man schon an dieser Stelle besprechen, daß man die Proportionalität 4.15 auch finden kann, wenn man die Größen der Tabelle 4.1 in ein F- Δl -Koordinatensystem einzeichnet (Bild 4.1) und die Kurve bespricht, die durch die erhaltenen Punkte gelegt werden kann.

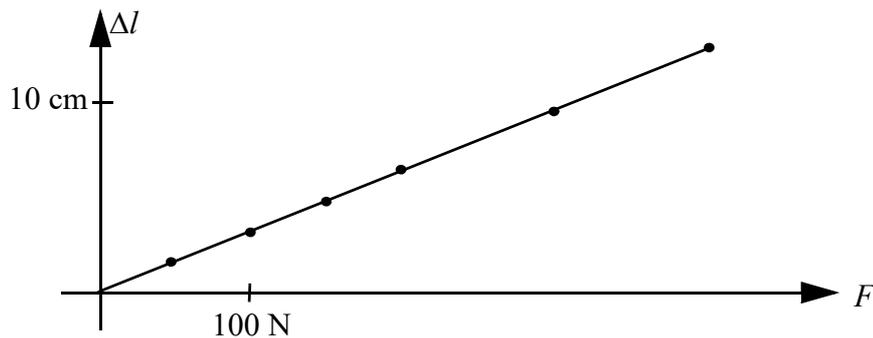


Bild 4.1. Zur zeichnerischen Auffindung des Elastizitätsgesetzes

Die Schüler sehen, daß das erhaltene Linienstück ein Teil einer Geraden ist, die durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht und deren Punkten die Gleichung 4.14 zugeordnet werden kann.

Der Anstiegfaktor " $k_7 = \Delta(\Delta l) / \Delta F_1$ " wird als Elastizitätskoeffizient interpretiert und der Zeichnung entnommen.

Die Schüler erkennen bei dieser Besprechung, daß nicht nur der Weg über Proportionen, sondern auch der über grafische Darstellungen zur Erkenntnis von Gesetzmäßigkeiten führt.

4.3. Das Volumen einer Gasportion in Abhängigkeit von der Thermie Das Gesetz von Gay-Lussac

Ein komplizierter Fall liegt bei einem Vorgang vor, bei dem sich die Funktionsgröße zwar ebenfalls proportional mit der Einmalpotenz der Argumentengröße ändert, so daß die Meßpunkte wiederum auf einer Geraden liegen, diese aber nicht durch den Koordinatennullpunkt verläuft. Hätten wir es mit einem x-y-Koordinatensystem zu tun und schnitte die Gerade die y-Achse im

Punkt "(0,n)", wäre den Punkten dieser Geraden die Gleichung

$$(4.17) \quad y_i = m \cdot x_i + n$$

zuzuordnen, also die Gleichung, die die Schüler in der Form " $y = m x + n$ " ebenfalls als «Geradengleichung» vom Mathematikunterricht her kennen.

Ein solcher Vorgang ist zum Beispiel die schon im Unterabschnitt 12.5 (5) des zweiten Teils besprochene Erwärmung einer Gasportion, deren Druck während der Erwärmung konstant gehalten wird (und auch die Erwärmung einer Gasportion, deren Volumen während der Erwärmung konstant gehalten wird).

Ich gehe auf die Ableitung des Druck-Volumen-Gesetzes hier noch einmal ein, weil sie in diesem Abschnitt nicht fehlen sollte und weil sich besonders deutlich zeigt, wieviel die Schüler bei der Ableitung von Gesetzen tatsächlich zu bedenken haben. Werden im Unterricht die Schwierigkeiten bei der Ableitung zu deren vermeintlicher Vereinfachung weniger sorgfältig als im folgenden isoliert und fehlen in der Ableitung einzelne der notwendigen und im folgenden ausführlich beschriebenen Überlegungen, können die Schüler kaum die erforderliche Klarheit gewinnen. Wir sollten nicht erwarten, daß die Schüler selber bedenken könnten, was zum Verständnis nötig ist, aber im Unterricht nicht ausdrücklich besprochen wird.

Wenn bei der Erarbeitung des Thermie-Volumen-Gesetzes die Abstände der Celsiusdifferenzthermien nicht gleich groß sind (wie die in der Tabelle 12.1 des zweiten Teils notierten), sondern ungleich wie die in den Zeilen 1 bis 5 der folgenden Tabelle 4.2 aufgeführten, sind die Schüler kaum in der Lage, den Argumenten- und den Funktionsgrößen eine Funktionsgleichung zu entnehmen.

1	2	3
Versuchsnummer	$(\Delta T_c)_i$ in K	V_i in ml
1	18	100,0
2	30	104,1
3	52	111,6
4	85	123,0
5	100	128,1

Tabelle 4.2. Zur Auffindung des Therrnie-Volumen-Gesetzes

Diese kann aber vergleichsweise leicht gefunden werden, wenn die Meßergebnisse - wie auch im Teil 2 geschehen - in ein ΔT_c - V -Koordinatensystem eingezeichnet werden (Bild 4.2, Teilbild

1) und die erhaltene Kurve (Gerade) diskutiert wird.

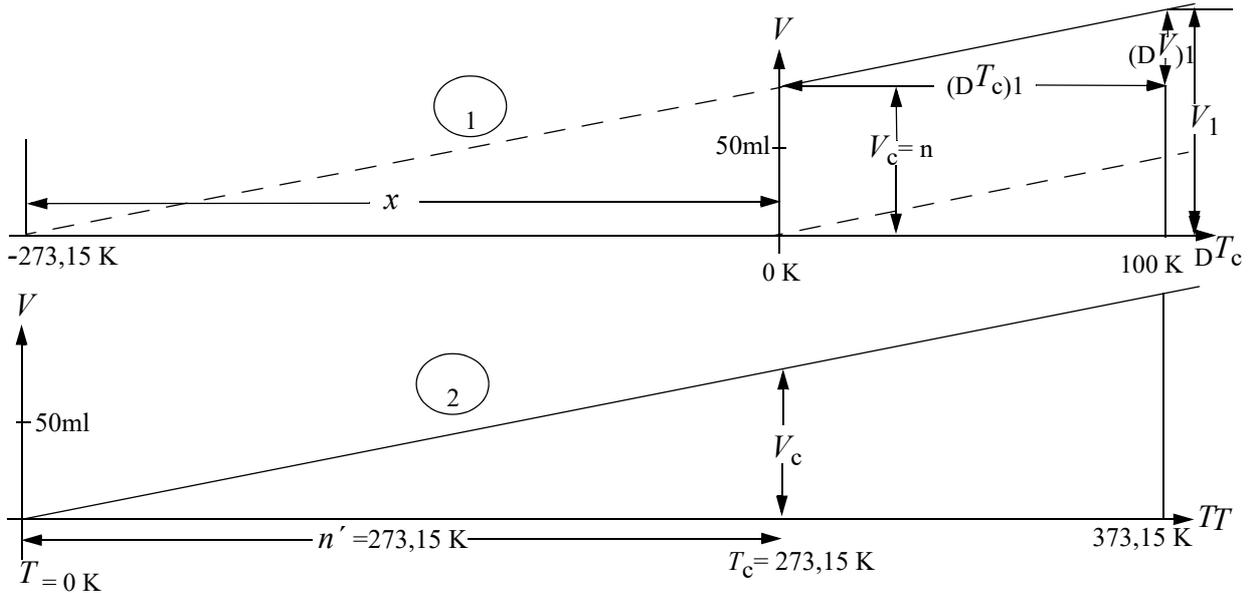


Bild 4.2. Zum Auffinden des Thermie-Volumen-Gesetzes bei einer Gasportion, deren Druck während der Erwärmung konstant gehalten wird, und zum Übergehen von der Celsiusdifferenzthermie " ΔT_c " (Celsiusdifferenzthermie t) zur Thermie " r " (:thermodynamische Temperatur T).

Die Gerade, die im Teilbild 1 durch den Nullpunkt des Koordinatensystems verläuft, zeigt an, daß sich das um das Ausmaß " V_c " verkleinerte Volumen " V " proportional mit der Celsiusdifferenzthermie " ΔT_c " ändert; die Gerade, die im Teilbild 1 durch den Punkt " $V = V_c$ " verläuft, zeigt an, daß sich das Volumen " V " proportional mit der um 273,15 K vergrößerten Celsiusdifferenzthermie " ΔT_c " ändert; und die Gerade im Teilbild 2 zeigt an, daß sich das Volumen " V " proportional mit der Thermie " T " ändert.

Das Bild zeigt, daß für die bei dieser Versuchsreihe gefundenen Meßpunkte die der Gleichung 4.17 entsprechende Gleichung

$$(4.18) \quad V_i = m \cdot (\Delta T_c)_i + n \text{ anzusetzen ist.}$$

Die für unsere Versuche geltenden Ausmaße für n und m können wir dem Teilbild 1 entnehmen. Die Gerade, die so durch die Meßpunkte gelegt ist, daß diese möglichst wenig um sie streuen, läßt folgendes erkennen:

(1) Das Absolutglied " n " ist das Volumen " V_c ", also das Volumen, das die Gasportion bei der Thermie erstarrenden Wassers ($\Delta T_c = 0 \text{ K}$) hat. Sein Ausmaß kann dem Bild entnommen werden. Wenn die Meßergebnisse und die Zeichnung sehr genau sind, finden wir: $V_c = 93,8 \text{ ml}$.

Mit diesen beiden Größen können wir die in der Tabelle 4.2 notierten Ausmaße ergänzen und über die Zeilen 1 bis 5 gewissermaßen noch eine Zeile "0" mit den Größen " $\Delta T_c = 0 \text{ K}$ " und „ $V_c = 93,8 \text{ ml}$ " setzen.

(2) Der Anstiegfaktor

$$(4.19) \quad m = \frac{V_j - V_i}{(\Delta T_c)_j - (\Delta T_c)_i}$$

ist - wie zum Beispiel die Ausmaße der Zeile 5 und der erst nachträglich ermittelten Zeile "0" ergeben -

$$(4.20) \quad m = \frac{128,1 \text{ ml} - 93,8 \text{ ml}}{100 \text{ K} - 0 \text{ K}} = 0,343 \text{ ml/K.}$$

Dieser Faktor besagt, daß sich das Volumen der Gasportion je Thermieänderung um 1 K um 0,343 ml ändert.

Damit erhalten wir für die Meßpunkte unserer Versuchsreihe die Gleichung

$$(4.21) \quad V_i = (0,343 \text{ ml/K}) \cdot (\Delta T_c)_i + 93,8 \text{ ml},$$

beziehungsweise - wenn wir beide Volumina auf ein und dieselbe Seite des Gleichheitszeichens bringen -

$$(4.22) \quad (V_i - 93,8 \text{ ml}) = (0,343 \text{ ml/K}) \cdot (\Delta T_c)_i.$$

Wollen wir die Gleichung für die Geradenpunkte durch eine Proportionalität für die Gerade umformulieren, sind die Stadiumsindizes wegzulassen, und es ist das Gleichheitszeichen durch ein Proportionalitätszeichen zu ersetzen:

$$(4.23) \quad (V - 93,8 \text{ ml}) \sim (0,343 \text{ ml/K}) \cdot \Delta T_c:$$

Das um 93,8 ml verkleinerte Volumen ändert sich proportional mit der Celsiusdifferenzthermie (Teilbild 1, Gerade durch den Nullpunkt des ΔT_c -V-Koordinatensystems).

Das Implikat 4.23 ist insofern unbefriedigend, als wir formulieren möchten, wie sich die Funktionsgröße "Volumen" (und nicht, wie sich das um ein bestimmtes Ausmaß verkleinerte Volumen) mit der Thermie ändert. Es wäre sachgerechter, eine Proportionalität für die Gerade zu formulieren, die durch die Punkte verläuft, die die tatsächlich gemessenen Größen darstellen.

Eine solche Proportionalität läßt sich formulieren, wenn wir uns daran erinnern, daß das Bild 4.2 zeigt, daß die durch die Meßpunkte gezeichnete Gerade nicht nur die Ordinaten-, sondern auch die Abszissenachse in einer bestimmten Entfernung vom Nullpunkt schneidet. Das Ausmaß der Abszisse kann dem Bild entnommen werden.

Dieses Ausmaß ist allerdings mit einer größeren Unsicherheit behaftet als das Ordinatenausmaß, weil dieser Schnittpunkt weiter vom Koordinatennullpunkt entfernt ist als der Schnittpunkt mit der Ordinatenachse und die Gerade die Abszissenachse deshalb unter einem kleineren Winkel schneidet. - Mit Schulmitteln wurde schon gut experimentiert, wenn die Abszisse des Schnittpunkts nicht mehr als etwa 5 K vom exakten Ausmaß abweicht.

Die Schulexperimente und die zugehörige Zeichnung liefern aber immerhin ein Ausmaß, das in brauchbarer Nähe des exakten Ausmaßes liegt, so daß uns die Schüler abnehmen können, daß dieses - wie wir ihnen mitteilen müssen - 273,15 K ist.

Dieses Ausmaß kann auch mit Hilfe des Ähnlichkeitssatzes (Teilbild 1) berechnet werden:

$$(4.24) \quad \frac{x}{V_c} = \frac{(\Delta T_c)_i}{(\Delta V)_i}$$

$$(4.25) \quad x = \frac{100 \text{ K}}{34,3 \text{ ml}} \cdot 93,8 \text{ ml} = 273 \text{ K}$$

Die Erstarrungsthermie von Wasser ($\Delta T = 273,15 \text{ K}$) ist per definitionem festgelegt, so daß das Ausmaß "273,15 K" heute ein mathematisch genaues (und nicht etwa ein durch Runden gewonnenes) Ausmaß ist.

Mit dem vorstehenden Ergebnis können wir statt 4.23 schreiben

$$(4.26) \quad V \sim (0,343 \text{ ml/K}) \cdot (\Delta T_c + 273,15 \text{ K}):$$

Das Volumen der Gasportion ändert sich proportional mit der um 273,15 K vergrößerten Celsiusdifferenzthermie (Teilbild 1, Gerade durch die Meßpunkte).

In der Praxis rechnet man im allgemeinen nicht mit dem Ausmaß "273,15 K", sondern mit dem abgerundeten Ausmaß "273 K", da die Ausmaße anderer Größen (wie zum Beispiel V_c und m in den vorstehenden Ausführungen) auch nur auf drei Stellen angegeben sind. In präzisen Aussagen ist das exakte Ausmaß aber unverzichtbar. So ist beispielsweise die Tripelthermie von Wasser (273,16 K) nur von dessen Erstarrungsthermie "273,15 K" (nicht aber von der gerundeten Thermie "273 K" um 0,01 K verschieden.

Mit der Proportionalität 4.26 brauchen wir nicht vom gemessenen Volumen zu einem um das Ausmaß " V_c " verkleinerten Volumen beziehungsweise von der durch die Meßpunkte verlaufenden Geraden zu einer durch den Koordinatennullpunkt verlaufenden überzugehen. Es wird jetzt nicht die durch die Meßpunkte verlaufende Gerade so weit nach unten verschoben, daß sie durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht; es wird jetzt vielmehr das (nicht naturgegebene, sondern von uns mehr oder weniger zweckmäßig positionierte) Koordinatensystem verschoben, und zwar so weit nach links, daß die V-Achse durch den Punkt mit dem Abszissenaxor "-273 K" verläuft (Teilbild 2).

Den Umweg über das Implikat 4.23 braucht man 'selbstverständlich' nicht zu machen, wenn die Schüler als Gleichung für eine nicht durch den Nullpunkt eines x-y-Systems gehende Gerade nicht nur die Gleichung " $y = m \cdot x + n$ " kennen, sondern auch die Gleichung " $y = m(x - n)$ ", also die Geradengleichung, in der ein Absolutglied nicht der Funktions-, sondern der Argumentgröße zugefügt ist.

Werden Versuche mit Gasportionen anderer Größen durchgeführt, zeigt sich etwas sehr Wichtiges: Die durch die Meßpunkte gezeichneten Geraden schneiden die V-Achse des Koordinatensystems sowohl in verschiedenen (Ordinaten-)Punkten (also bei verschiedenen V_G -Ausmaßen) wie auch unter verschiedenen Anstiegswinkeln (also unter verschiedenen Ausmaßen des Quotienten " $(V_j - V_i) / ((\Delta T_c)_j - (\Delta T_c)_i)$ "); aber alle Geraden schneiden die ΔT_G -Achse in ein und demselben Punkt, nämlich im Punkt mit dem Abszissenaxor "-273,15 K".

Das Absolutglied der Proportionalität 4.26 ist also (im Gegensatz zum Anstiegsfaktor) bei Gasportionen aller Größen gleich. Wir können deshalb das Ergebnis aller bisherigen Versuche durch eine allgemeinere Proportionalität darstellen,

$$(4.27) \quad V \sim \frac{V_j - V_i}{(\Delta T_c)_j - (\Delta T_c)_i} \cdot (\Delta T_c) + 273,15 \text{ K} :$$

Das Volumen aller Portionen eines (idealen) Gases ändert sich proportional mit der um 273,15 K vergrößerten Celsiusdifferenzthermie. - Es liegt nahe, für das für alle Versuche gültige Absolutglied eigene Zeichen einzuführen, und zwar den Namen "Celsiusthermie" und das Symbol "TG" (traditionell "To" geschrieben; siehe Teil 2).

Diese Größe hat offensichtlich eine allgemeinere Bedeutung. Und diese kann mit Hilfe der folgenden Überlegung erkannt werden. - Wird in die (der Proportionalität 4.27 entsprechende) Gleichung

$$(4.28) \quad V_i = \frac{V_j - V_i}{(\Delta T_c)_j - (\Delta T_c)_i} \cdot [(\Delta T_c) + 273,15 \text{ K}] :$$

für $({}_D T_c)_i$ der negativ orientierte Thermieaxor " $(\Delta \vec{T}_c)_1 = -273,25 \text{ K}$ " eingesetzt, ergibt sich bei besonderer Betrachtung des Klammerausdrucks

$$(4.29) \quad V_i = \frac{V_j - V_1}{({}_D T_c)_j - ({}_D T_c)_i} \cdot [-273,25 \text{ K} + 273,15 \text{ K}] = 0$$

Das heißt aber: Beim Abkühlen wird das Volumen aller Gasportionen bei $-273,15 \text{ K}$ gleich null.

Bei Experimenten, mit deren Hilfe untersucht wird, wie sich der Druck einer Gasportion (bei konstant gehaltenem Volumen) mit der Celsiusdifferenzthermie ändert, wird der Druck ebenfalls bei $-273,15 \text{ K}$ gleich null.

Da das Volumen (und ebenso der Druck, den die Gasportion auf die Gefäßwand ausübt) nicht kleiner als null werden kann, dürfen wir schließen, daß der negativ orientierte Axor der Celsiusdifferenzthermie nicht größer als $-273,15 \text{ K}$ werden kann, daß also der Zielpol dieses Axors der naturgegebene Nullpunkt einer Skala ist, auf der Thermien (und nicht Celsiusdifferenzthermien) abgetragen werden, also der Punkt " $T = 0 \text{ K}$ ". Das legt nahe, vom Koordinatensystem mit der Achse für Celsiusdifferenzthermien zu einem Koordinatensystem mit einer Achse für Thermien überzugehen (Teilbild 1 \Rightarrow Teilbild 2). In einem solchen Koordinatensystem entspricht jede Thermie " T_i " der um $273,15 \text{ K}$ vergrößerten Celsiusdifferenzthermie "(3,TG)";:

$$(4.30) \quad T_i = ({}_D T_c)_i + 273,15 \text{ K} = ({}_D T_c)_i + T_c;$$

insbesondere entspricht die Thermie erstarrenden Wassers " $T_c = 273,15 \text{ K}$ " der Celsiusdifferenzthermie " ${}_D T_c = 0 \text{ K}$ ".

Arbeiten wir mit dem T-V-Koordinatensystem (Teilbild 2), können wir statt 4.27 schreiben

$$(4.31) \quad V \sim \frac{V_j - V_1}{({}_D T_c)_j - ({}_D T_c)_i} \cdot T;$$

Das Volumen einer Gasportion ändert sich proportional mit der ('absoluten') Thermie.

Verwenden wir für den Anstiegfaktor die Volumina bei $T_i = 273,15 \text{ K}$ und $T_i = 0 \text{ K}$, also die Volumina " $V_i = V_c$ " und $V_i = 0$ ", ergibt sich

$$(4.32) \quad V \sim \frac{V_c}{T_c} \cdot T$$

beziehungsweise

$$(4.33) \quad V \sim \frac{1}{T_c} \cdot V_c \cdot T .$$

T_c ist bei allen Gasportionen gleich und damit eine Gesetzeskonstante, während sich V_c mit der Größe der Gasportion ändert. V_c fungiert in den vorstehenden Proportionalitäten also als ein Maß für die Größe einer Gasportion, für das später eine zweckmäßigere Größe eingeführt wird, nämlich die von Thermie und Druck unabhängige Anzahl N der Molekülmenge.

Die Proportionalität 4.33 ist also zu lesen: Das Volumen der Gasportion ändert sich proportional mit dem Volumen " V_c ", das die Gasportionen bei der Thermie " $T_c = 273,15 \text{ K}$ " (also bei der Thermie erstarrenden Wassers) haben und proportional mit der Thermie; der Proportionalitätsfaktor ist die Kehrgroße der Celsiusthermie " T_c ".

Die Proportionalität 4.33 entspricht der in der Thermodynamik verwendeten Gleichung

$$(4.34) \quad V_i = \frac{I}{T_0} \cdot V_0 \cdot T_i .$$

beziehungsweise den sich aus dieser Funktionsgleichung ergebenden Proportionen

$$(4.35) \quad \frac{V_i}{V_0} \sim \frac{T_i}{T_0}$$

und

$$(4.36) \quad \frac{V_i}{V_j} \sim \frac{T_i}{T_j}$$

Die Volumina der Gasportionen verhalten sich wie die thermodynamischen Temperaturen:

Die Gleichung 4.36 wird erhalten, indem man die für das Volumen "V," und die Thermie "T," formulierte Gleichung 4.35 durch die für das Volumen "VI" und die Thermie "T" formulierte Gleichung 4.35 dividiert:

$$(4.37) \quad \frac{V_i}{V_0} = \frac{T_i}{T_0} \wedge \frac{V_j}{V_0} = \frac{T_j}{T_0} \Rightarrow \frac{V_i/V_0}{V_j/V_0} = \frac{T_i/T_0}{T_j/T_0} \Rightarrow \frac{V_i}{V_j} = \frac{T_i}{T_j}$$

Nun ist nur noch zu bedenken, daß 4.33 lediglich bei bestimmten Bedingungen gilt, nämlich nur dann, wenn wir mit Gasportionen jeweils gleich bleibender Größe und gleich bleibenden Druckes arbeiten, und daß wir deshalb diese Bedingungen auch im Formelbild zum Ausdruck bringen und folglich die gesamte Gesetzmäßigkeit durch ein Implikat aus zwei Bedingungsgleichungen und einer Proportionalität formulieren sollten. Ersetzen wir die Aussage, daß sich die Größe der jeweiligen Gasportion während des Erwärmens nicht ändern darf, schon jetzt durch die Aussage, daß sich die Anzahl der Molekülmenge nicht ändern darf, können wir für den in Rede stehenden Vorgang endgültig das Implikat formulieren

$$(4.38) \quad N = \text{konst} \wedge p = \text{konst} \Rightarrow V \sim \frac{I}{T_c} \cdot V_c \cdot T .$$

Bei der Ableitung dieses (Sonder-)Gesetzes ist es also nicht erforderlich, eine Gleichung zu linearisieren: die Meßpunkte liegen schon von vornherein auf einer Geraden. Es wird lediglich das ursprüngliche Koordinatensystem durch ein zweckmäßigeres ersetzt, und zwar durch ein System, auf dessen Abszissenachse eine neue Argumentengröße ($T = {}_D T_c + T_c$) von einem neuen Nullpunkt aus ($T = 0 \text{ K}$) abgetragen wird. Die Ersetzung der Geradenproportionalität mit einem additiven Glied bei der Funktionsgröße (4.23) zunächst durch eine Proportionalität mit einem additiven Glied bei der Argumentengröße (4.25) und dann durch eine Proportionalität ohne additives Glied (4.33) erfordert einige Denkarbeit. Deren Einsatz lohnt sich aber. Sie führt nicht nur zu einer klaren und vergleichsweise einfachen Darstellung der gesuchten Gesetzmäßigkeit, sondern in einem beträchtlichen Ausmaß auch zu einem besseren Verständnis des physikalischen Sachverhalts: Wir erkennen, daß es eine 'absolute Nullthermie' gibt und daß wir mit der Größe "Thermie" selbst arbeiten können, also nicht mehr mit der Größe "Celsiusdifferenzthermie" (und erst recht nicht mehr mit der Celsiusstemperatur) arbeiten müssen. - Und zu dieser Einsicht kamen wir, weil wir nicht mit der Aussage zufrieden waren, daß sich das um das Aus-

maß " V_c " verkleinerte Volumen proportional mit der Celsiusdifferenzthermie ändert, sondern wissen wollten, wie sich das gemessene Volumen selbst mit der Thermie ändert.

Damit zeigt dieser Unterabschnitt besonders deutlich, wie wichtig es ist, die naturgegebenen und die technisch (willentlich) herbeigeführten Phänomene mit von uns geeignet gewählten Größen und mit von uns geeignet gewählten Koordinatensystemen darzustellen und zu analysieren. Menschliches Erkennen ist nicht ein passives Zur-Kennntnis-Nehmen von Phänomenen, sondern zu einem beträchtlichen Teil ein aktives Konstruieren von (insbesondere mathematischen) Hilfsmitteln, mit deren Hilfe wir uns die Phänomene verständlich machen können. "Mathematisieren des Physikunterrichts" darf nicht nur heißen "im Physikunterricht rechnen", sondern muß in erster Linie heißen "die physikalischen Phänomene (auch) mathematisch so erfassen, daß wir sie besser (als ohne die mathematische Analyse) verstehen können".

Ein solcher Unterricht erfordert seine Zeit. Ich meine aber, daß wir uns diese Zeit nehmen sollten. Der Physikunterricht an den allgemeinbildenden Schulen hat meiner Meinung nach in erster Linie die Aufgabe, den Schülern - und zwar allen - die grundlegend wichtigen Erkenntnisse und die grundlegend wichtigen Denk- und Vorgehensweisen der Physik zu erschließen. Alle anderen, nur für Physiker und Techniker wichtigen, für den Nichtphysiker und Nichttechniker aber entbehrlichen Kenntnisse und Verfahren kennenzulernen, ist nicht Aufgabe aller Schüler an allgemein bildenden Schulen, sondern (nur) Aufgabe der späteren Studenten der Physik und der Ingenieurwissenschaften während des Hochschulstudiums.

4.4. Das Volumen einer Gasportion in Abhängigkeit vom Druck Das Gesetz von Boyle und Mariotte

Die Ausführungen der Unterabschnitte 4.2 und 4.3 berühren noch nicht das Hauptanliegen dieses Abschnittes, nämlich die Linearisierung von Gleichungen beziehungsweise Proportionalitäten. Diese wird erst erforderlich, wenn die Punkte, die die gemessenen Größen abbilden, nicht um eine Gerade, sondern um eine krumme Kurve streuen. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn eine Gasportion bei gleichbleibender Thermie zusammengedrückt oder entspannt wird und die gemessenen Volumina über den gemessenen Drücken abgetragen werden - wenn also das Gesetz von Boyle und Mariotte gesucht wird.

Eine Versuchsreihe liefere die in den Spalten 2 und 3 der Tabelle 4.3 notierten Größen.

Spalte				
1	2	3	4	5
Versuchsnummer	p_i in hPa	V_i in ml	$p_i \cdot V_i$ in hPa \cdot ml	$1/p_i$ in hPa ⁻¹
1	400	190,0	76000	0,00250
2	600	126,6	75960	0,00167
3	800	96,0	76000	0,00125
4	900	84,8	75960	0,00111
5	1000	76,0	76000	0,00100

Tabelle 4.3. Zur Ermittlung des Gesetzes von Boyle und Mariotte

Die Schüler erkennen, daß zwischen den Drücken und den Volumina eine Je-größer-desto-kleiner-Beziehung besteht und daß damit in einem mathematischen Ausdruck, der für alle Versuche das gleiche einheitengebundene Ausmaß ergeben soll, die Größen " p_i " und " V_i " (nicht in einem Quotienten, sondern) in einem Produkt miteinander verknüpft sein müssen (gleichgültig in welcher Potenz die Größen in diesem Produkt stehen und gleichgültig, ob in diesem Produkt auch Absolutglieder vorkommen oder nicht).

Schon das einfachst mögliche Produkt " $p_i \cdot V_i$ ", also das Produkt, in dem nur Einmalpotenzen und keine Absolutglieder vorkommen, ist - wie die Ausmaße der Spalte 4 zeigen - bei allen Versuchen gleich:

$$(4.39) \quad p_i \cdot V_i = 76 \cdot 10^3 \text{ hPa} \cdot \text{ml}.$$

Damit ist den gemessenen Größen die Proportionalität

$$(4.40) \quad V \sim 76 \cdot 10^3 \text{ hPa} \cdot \text{ml} \cdot 1/p$$

zu entnehmen: Das Volumen ändert sich proportional mit der Kehrgroße des Druckes.

Bei Versuchen mit Gasportionen anderer Größen ergibt sich die gleiche Proportionalität; aber der Proportionalitätsfaktor ändert sich mit der Anzahl der Molekülmenge und mit der Thermie, ist also auch selber eine Funktionsgröße der Argumentengrößen " N " und " T ".

Damit können wir die Proportionalität 4.40 verallgemeinern und mit den Bedingungsgleichungen zu einem Implikat zusammenfassen;

$$(4.41) \quad N = \text{konst} \wedge T = \text{konst} \Rightarrow V \sim k_g(N, T) \cdot 1/p:$$

Das Volumen einer Gasportion ändert sich bei gleichbleibender Anzahl der Molekülmenge und bei gleichbleibender Thermie proportional mit der Kehrgroße des Druckes.

Der Proportionalitätsfaktor " $k_g(N, T)$." (4.41) ist als Druck-Volumen-Produkt ein Maß für die Energie (Arbeitsfähigkeit) der Gasportion:

$$(4.42) \quad p \cdot V = E/l^2 \cdot l^3 = F \cdot l = W.$$

In der Konstanten verbirgt sich offenbar auch ein Maß für die Größe der Gasportion: Je größer diese ist, desto größer ist auch k_g .

Die Beziehung 4.41 finden wir auch, wenn wir die Meßergebnisse in ein p - V -Koordinatensystem eintragen (Bild 4.3).

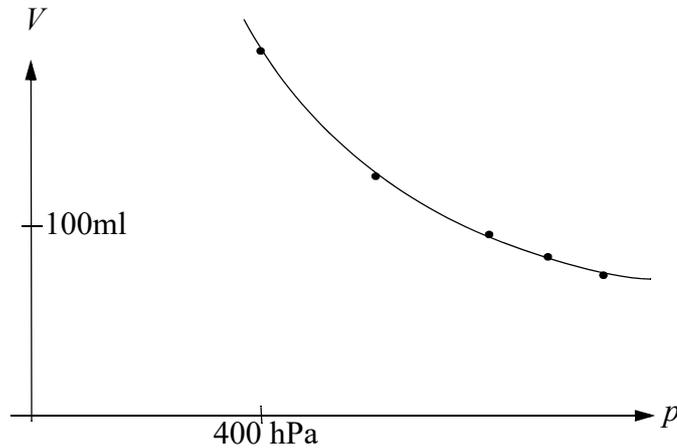


Bild 4.3 Zur Ermittlung des Gesetzes von Boyle und Mariotte

Die Meßpunkte liegen auf einer Kurve, die sich asymptotisch den Achsen des Koordinatensystems zu nähern scheint. Es kann vermutet werden, daß sie ein Stück einer Hyperbel ist. (Wenn sich die Vermutung als unzutreffend herausstellen sollte, wäre - wie schon ausgeführt - zu prüfen, um welche andere Kurve es sich handeln könnte.)

Es wird zunächst geprüft, ob die einfachst mögliche Proportionalität für eine Hyperbel,

$$(4.43) \quad V \sim k_g \cdot 1/p,$$

schon die Kurve beschreibt.

Ich symbolisiere den hypothetischen Proportionalitätsfaktor in 4.43 mit " k_g " (also so wie in 4.41), obwohl sich erst noch herausstellen muß, daß die Kurve eine Hyperbel ist.

Dazu wird $1/p$ als eine neue Argumentengröße betrachtet, werden die $1/p$ -Ausmaße berechnet (Spalte 5 der Tabelle 4.3) und werden die V -Ausmaße über den $1/p$ -Ausmaßen abgetragen (Bild 4.4).

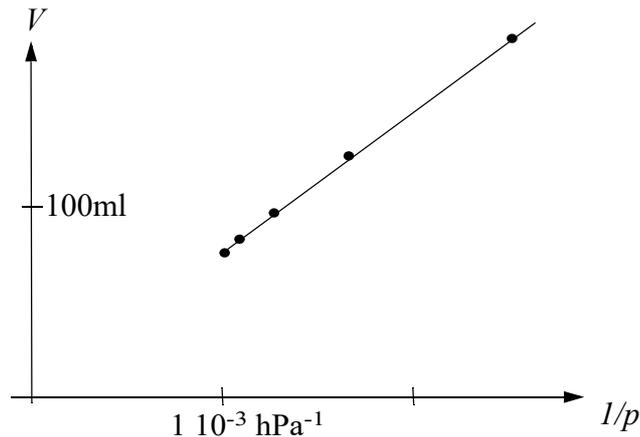


Bild 4.4. Noch einmal: Zur Ermittlung des Gesetzes von Boyle und Mariotte

Durch die sich ergebenden Punkte kann eine Linie gelegt werden, die eindeutig als eine durch den Nullpunkt des Systems gehende Gerade zu erkennen ist (während das Kurvenstück im Bild 4.3 nicht zweifelsfrei als ein Hyperbelstück angesprochen werden konnte). Der erste Ansatz war also schon zutreffend: Das Volumen ändert sich proportional mit der Kehrgroße des Druckes.

Auch bei Versuchen mit Gasportionen anderer Größen gehen die Geraden im $1/p$ - V -Koordinatensystem durch dessen Nullpunkt, so daß sich auch bei dieser Ableitung als Gesamtergebnis das Implikat 4.41 ergibt.

Damit ist erkannt, daß grafische Darstellungen im Verein mit der Linearisierung von Kurvengleichungen auch dann zu Gesetzesproportionalitäten führen können, wenn die Beziehungen zwischen den gemessenen Funktions- und Argumentengrößen nicht linear sind.

4.5. Die Dauer einer einzelnen Schwingung einer Kompaßnadel in einem Magnetfeld in Abhängigkeit von der Magnetfeldstärke

Wenn die Schüler an Beispielen der vorstehenden Art das Linearisieren von Gleichungen und Proportionalitäten erfaßt haben, kann dieses auch bei solchen Gesetzmäßigkeiten angewendet (und geübt) werden, bei denen eine mathematisch exakte Formulierung nicht auf Anhieb gefunden werden kann. - Es werde der folgende Versuch durchgeführt: Im Innern einer elektrizitätsdurchflossenen Spule, die horizontal in Nord-Süd-Richtung aufgestellt ist, schwingt eine horizontal gelagerte Kompaßnadel; der Spulenstrom fließt so, daß seine Magnetfeldstärke " H_s " und die Horizontalkomponente " H_h " der Magnetfeldstärke der Erde gleichsinnig (und nicht gegensinnig) wirken. Es ist zu bestimmen, in welcher Weise die Dauer " T " einer einzelnen Schwingung (also die sogenannte Periodendauer " T ") von der Magnetfeldstärke der elektrizitätsdurchflossenen Spule abhängt und wie groß die Horizontalkomponente der Magnetfeldstärke der Erde am Versuchsort ist. - Ein Versuch liefere die in den Spalten 2 und 3 der Tabelle 4.4 notierten Meßergebnisse und damit die Kurve des Bildes 4.5.

Spalte				
1	2	3	4	5
Versuchs- nummer	$(H_s)_i$ in A/m	T_i in s	$1/T_i$ in 1/s	$1/T_i^2$ 1 in 1/s ²
1	0	7,0	0,143	0,020 45
2	18,7	4,6	0,217 5	0,047 2
3	37,4	3,7	0,270	0,073 0
4	74,8	2,8	0,357	0,123 8
5	112,0	2,3	0,435	0,189
6	149,6	2,1	0,476	0,227
7	187	1,9	0,526	0,277
8	290	1,5	0,666	0,444
9	374	1,3	0,770	0,593
10	478	1,2	0,833	0,695
11	560	1,1	0,910	0,828
12	748	0,95	1,052	1,108
13	935	0,85	1,176	1,380

Tabelle 4.4. Zur Abhängigkeit der Schwingungsdauer "T" einer Kompaßnadel von der Magnetfeldstärke H_s einer elektrizitätsdurchflossenen Spule im Magnetfeld der Erde.

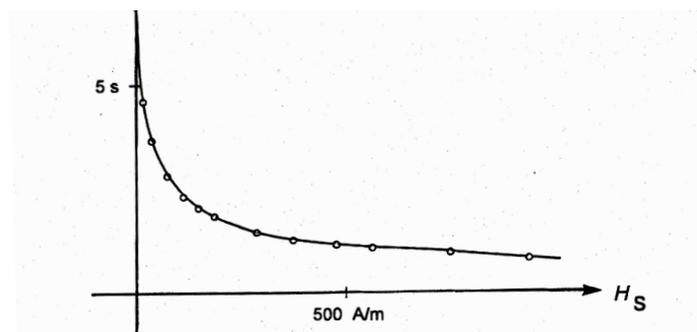


Bild 4.5. Zur Abhängigkeit der Schwingungsdauer "T" einer Kompaßnadel von der Magnetfeldstärke H_s einer elektrizitätsdurchflossenen Spule im Magnetfeld der Erde

Die Kurve sieht aus wie eine aus der Normallage verschobene Hyperbel. Den Punkten einer solchen ist die Gleichung

$$(4.44) \quad T_i = k_9 \cdot 1/[(H_s)_i + k_{10}]$$

zuzuordnen. - Würde man den Quotienten in 4.44 als (neue) Argumentengröße betrachten, wäre 4.44 eine Geradengleichung und könnte man auf die inzwischen bekannte Weise prüfen, ob die

Kurve tatsächlich eine verschobene Hyperbel ist. Da wir (aber) k_{10} nicht kennen, können wir diesen Quotienten nicht berechnen und können damit auch nicht T (in einem Koordinatensystem mit einer $1/[(H_s) + k_{10}]$ -Achse und einer T -Achse) über diesem Quotienten abtragen. Um eine berechenbare (neue) Argumentengröße zu finden, müssen H_s und k_{10} getrennt werden. Das ist möglich, wenn die Summe " $H_s + k_{10}$ " (nicht im Nenner, sondern) im Zähler eines Bruches steht, und erfordert deshalb, daß wir - um dieses Ziel zu erreichen - vorübergehend von der Funktionsgröße " T " zu einer (neuen) Funktionsgröße " $1/T$ " übergehen, also gerade das machen, was wir im Unterabschnitt 4.3 zu vermeiden suchten. (In diesem wollten wir nicht von dem als Funktionsgröße gemessenen Volumen " V " zu einer nicht gemessenen Funktionsgröße " $V - V_c$ " übergehen.) Wir formen also 4.44 um:

$$(4.45) \quad 1/T_i = 1/k_9 \cdot (H_s)_i + 1/k_9 \cdot k_{10}$$

Statt 4.45 können wir auch schreiben:

$$(4.46) \quad 1/T_i = k_{11} \cdot (H_s)_i + k_{12}$$

Jetzt kann $1/T$ in einem H_s - $1/T$ -Koordinatensystem über H_s abgetragen werden und es können - sofern die sich ergebende Kurve eine Gerade ist - der Anstieg "k₁₁" und das Absolutglied "k₁₂" dem Geradenbild entnommen werden. - Wenn wir $1/T_i$ berechnen (Spalte 4 der Tabelle 4.4) und über $(H_s)_i$ abtragen (Bild 4.6), erhalten wir (aber) keine Gerade. $1/T$ wächst zu langsam. Der Ansatz führte also nicht zum gewünschten Ziel.

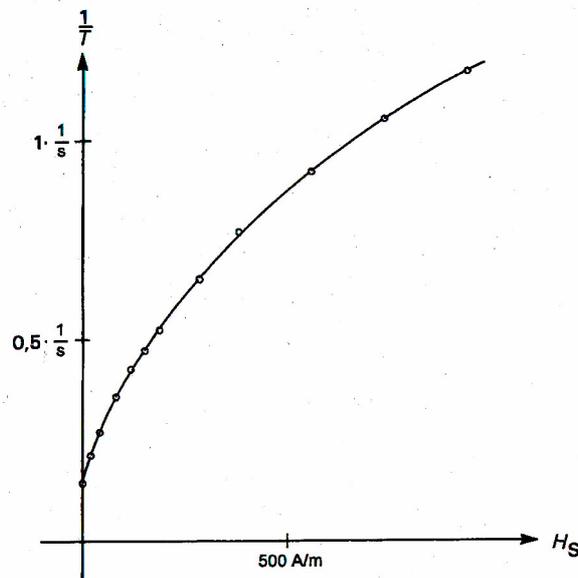


Bild 4.6. Noch einmal: Zur Abhängigkeit der Schwingungsdauer " T " einer Kompaßnadel von der Magnetfeldstärke " H_s " einer elektrizitätsdurchflossenen Spule im Magnetfeld der Erde

Eine besser geeignete Funktionsgröße können wir finden, wenn wir die Meßergebnisse der Tabelle 4.4 genauer betrachten. Dabei zeigt sich nämlich folgendes: Während sich zum Beispiel die $1/T$ -Ausmaße von der Zeile ($1/T_3 = 0,270 \text{ s}^{-1}$) bis zur Zeile 13 ($1/T_{13} = 1,16 \text{ s}^{-1}$) um den Faktor $1,176 / 0,270 = 4,36$ vergrößern, wachsen die $1/T^2$ -Ausmaße von $0,073 \text{ s}^{-2}$ auf $1,380 \text{ s}^{-2}$, also um den Faktor "18,9" (Spalte 5). Wir setzen deshalb beim zweiten Versuch $1/T^2$ als Funktionsgröße an:

$$(4.47) \quad 1/T^2 = k_{13} \cdot (H_s)_i + k_{14}$$

berechnen die Ausmaße von $1/T^2$ (Spalte 5), zeichnen die Punkte mit den Koordinaten " $(H_s)_i$ " und " $1/T_i^2$ " in ein H_s - $1/T^2$ -Koordinatensystem ein und zeichnen eine Kurve, die möglichst wenig von diesen Punkten abweicht (Bild 4.7).

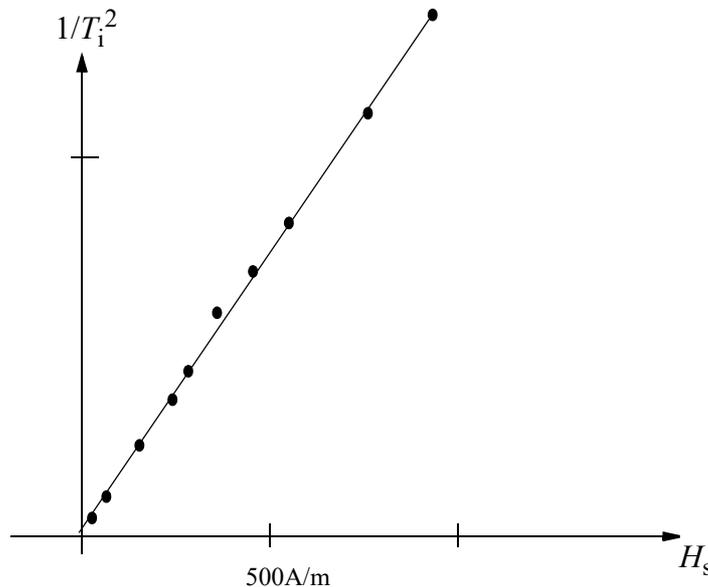


Bild 4.7. Und noch einmal: Zur Abhängigkeit der Schwingungsdauer " T " einer Kompaßnadel von der Magnetfeldstärke einer elektrizitätsdurchflossenen Spule im Magnetfeld der Erde

Die sich ergebende Kurve ist eine (knapp am Nullpunkt des Koordinatensystems vorbeigehende) Gerade. Der zweite Ansatz ist also richtig. k_{13} ist der Anstiegfaktor in der Geradengleichung 4.47,

$$(4.48) \quad k_{13} = \frac{1/T_i^2 - 1/T_j^2}{(H_s)_i - (H_s)_j},$$

und kann dem Bild 4.7 beziehungsweise den Ausmaßen in der Tabelle 4.4, zum Beispiel denen der Zeilen 13 und 1, entnommen werden:

$$(4.49) \quad k_{13} = \frac{1,38 \text{ s}^{-2} - 0,020 \text{ s}^{-2}}{935 \text{ A/m} - 0 \text{ A/m}} = 0,00145 \text{ (A/m)}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Das Absolutglied " k_{14} " in 4.47 ist die Ordinate des Punktes, in dem die erhaltene Gerade die Ordinatenachse schneidet (in dem also $H_s = 0$ ist [Tabelle 4.4, Zeile 1]):

$$(4.50) \quad k_{14} = 0,02045 \text{ s}^{-2}.$$

Wir lösen nun - unter vorläufiger Beibehaltung der Symbole " k_{13} " und " k_{14} " die Gleichung 4.47 in zwei Schritten nach T auf:

$$(4.51) \quad T_i^2 = \frac{1}{k_{13} \cdot (H_s)_i + k_{14}}$$

$$(4.52) \quad T_i = \sqrt[2]{\frac{1}{k_{13} \cdot (H_s)_i + k_{14}}}$$

und machen uns bewußt, daß die im Bild 4.5 gezeichnete Kurve eine aus der Normallage verschobene Hyperbel zweiter Ordnung ist. Das wäre ohne das Verfahren des Linearisierens sicherlich nicht gefunden worden. Die gesuchte Gleichung ist mit 4.52 insofern noch unbefriedigend formuliert, als die gemessene Argumentengröße " H_s " nicht für sich allein, sondern als Faktor in einem Produkt steht. Wir isolieren deshalb H_s in zwei weiteren Schritten:

$$(4.53) \quad T_i = \sqrt[2]{\frac{1}{k_{13} \cdot (H_s)_i + \frac{k_{13} \cdot k_{14}}{k_{13}}}}$$

Mit

$$(4.55) \quad \sqrt[2]{\frac{1}{k_{13}}} = k_{15}$$

und

$$(4.56) \quad k_{14} / k_{13} = k_{16}$$

können wir schreiben

$$(4.57) \quad T_i = k_{15} \cdot \sqrt[2]{\frac{1}{(H_s)_i + k_{16}}}$$

Aus 4.55 und 4.49 ergibt sich

$$(4.58) \quad k_{15} = \sqrt[2]{\frac{1}{0,00145 \text{ (A/m)}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}}} = 26,2 \text{ (A/m)}^{1/2} \cdot \text{s}$$

Aus 4.56 und 4.50 ergibt sich

$$(4.59) \quad k_{16} = \frac{0,02045 \text{ s}^{-2}}{0,00145 \text{ (A/m)}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}} = 14,1 \text{ (A/m)}$$

Das additive Glied ist also - wie es auch sein muß - eine magnetische Feldstärke. - Damit lautet die für unsere Versuchsreihe geltende Gleichung

$$(4.60) \quad T_i = \sqrt[2]{\frac{26,2 \text{ (A/m)}^{1/2} \cdot \text{s}}{(H_s)_i + 14,1 \text{ A/m}}}$$

Daß dieses Ergebnis richtig ist, kann man zeigen, indem man in diese Gleichung zum Beispiel das H_s -Ausmaß der Zeile 7 der Tabelle 4.4 einsetzt:

$$(4.61) \quad T_7 = \sqrt[2]{\frac{26,2 \text{ (A/m)}^{1/2} \cdot \text{s}}{187 \text{ A/m} + 14,1 \text{ A/m}}} = 1,85 \text{ s (gemessen 1,9 s)}$$

Die Gleichung 4.60 ist leicht zur gesuchten Gesetzesproportionalität umzuformen:

$$(4.62) \quad T_i \sim \sqrt[2]{\frac{26,2(\text{A/m})^{1/2} \cdot \text{s}}{(H_s)_i + 14,1 \text{A/m}}}$$

Nun ist nur noch das folgende zu besprechen. - Werden Versuche mit anderen Spulen und anderen Kompaßnadeln durchgeführt, ändert sich das Ausmaß des Proportionalitätsfaktors "k₁₅"; dieser hängt also offenbar von den verwendeten Geräten ab. Werden Versuche an verschiedenen (und weit voneinander entfernten) Orten durchgeführt, kann sich auch das additive Glied "k₁₆" ändern. Daraus dürfen wir schließen, daß k₁₆ die örtliche Horizontalkomponente der Magnetfeldstärke der Erde ist. Und damit können wir endgültig formulieren

$$(4.63) \quad T_i \sim \sqrt[2]{\frac{k_{15}}{H_s + H_h}}$$

Die Periodendauer ändert sich proportional mit bestimmten Gerätekonstanten und mit der Kehrgroße der Wurzel aus der Summe "Magnetfeldstärke der Spule + örtliche Horizontalkomponente der Magnetfeldstärke der Erde"; diese ist in unserer Versuchsreihe 14,1 A/m.

Das Magnetfeld der Erde hängt nicht nur von den Orten der magnetischen Pole der Erde ab, sondern ist auch kurz- und langfristigen periodischen Schwankungen sowie - bei erhöhter Sonnenaktivität («erdmagnetische Stürme») - auch unperiodischen Schwankungen unterworfen.

Es ist übrigens lehrreich, bei den Versuchen mit schwingenden Kompaßnadeln im Magnetfeld von Spule und Erde den Spulenstrom auch umzupolen, weil sich dann eine Kurve mit einer Polstelle ergibt. Die Schüler lernen dann ein physikalisches Beispiel für eine gebrochene rationale Funktion kennen, also eine Funktion, die im Mathematikunterricht üblicherweise (theoretisch) diskutiert wird, im Physikunterricht aber wohl kaum jemals zur Sprache kommt.

4.6. Die Konzentration einer Hydrogeniumchloridlösung («Salzsäure») an Hydroniumionen während einer Reaktion mit Magnesium in Abhängigkeit von der Reaktionsdauer

Um auch ein Beispiel aus dem Chemieunterricht zu behandeln und dabei noch eine weitere Kurve zu besprechen, sei noch eine chemische Umsetzung betrachtet: Es wird Salzsäure mit Magnesium umgesetzt und die Abhängigkeit der Anzahlkonzentration "c⁺" an Hydronium-Ionen (H₃O⁺) von der Reaktionsdauer "t" bestimmt. - Ein Versuch liefere die in den Spalten 2 und 3 der Tabelle 4.5 notierten Ergebnisse und damit das Bild 4.8.4

Spalte				
1	2	3	4	5
Versuchsnummer	t_i in s	c_i^+ in 10^{-5} hen/ml	c_i^+/c_A^+	$\lg(c_i^+/c_A^+)$ in l
1	0	16,00 (= c_A^+)	1,000	0,000
2	51,0	12,03	0,752	-0,124
3	82,0	10,42	0,651	-0,186
4	114,8	8,84	0,553	-0,257
5	154,6	7,24	0,453	-0,344
6	203,6	5,64	0,353	-0,452
7	281,6	4,04	0,253	-0,597
8	401,6	2,47	0,154	-0,812

Tabelle 4.5. Zur Änderung der Anzahlkonzentration einer Salzsäure an Hydroniumionen ICA- $[c^+(H_3O^+)]$ bei einer Umsetzung mit Magnesium in Abhängigkeit von der Reaktionsdauer. - Auf die Verwendung der Zählereinheit "1 hen" (an Stelle der Einheit "1 mol" werde ich im Abschnitt 8 eingehen).

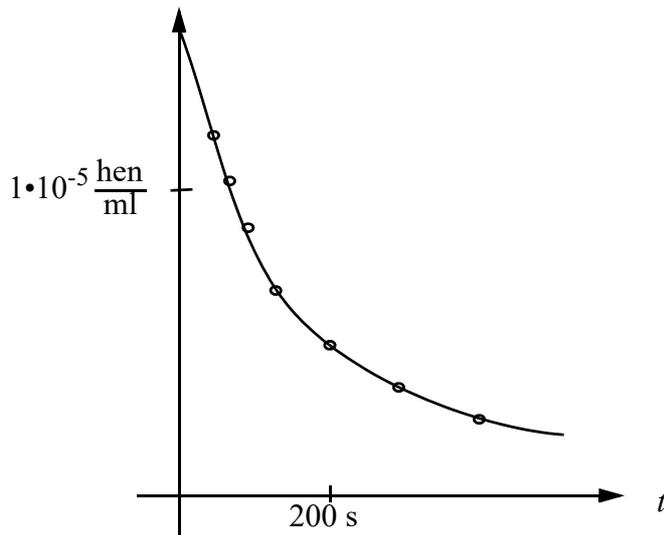


Bild 4.8. Zur Änderung der Anzahlkonzentration einer Salzsäure an Hydroniumionen bei einer Umsetzung mit Magnesium in Abhängigkeit von der Reaktionsdauer

Ich symbolisiere die Anzahlkonzentration ad hoc mit " c^+ ", weil gemäß DIN 4856 mit dem Zeichen " c " die «Stoffmengenkonzentration» («Molalität») und mit dem Zeichen " c^* " die «Äquivalentkonzentration» («Normalität») symbolisiert wird.

Die etwaigen Vermutungen, daß es sich bei der Kurve im Bild 4.8 um ein Stück einer Parabel oder einer Hyperbel handeln könnte, erweisen sich beim Versuch einer Linearisierung der entsprechenden Gleichungen als unzutreffend. Nun wird geprüft, ob es sich um eine Exponentialfunktion (e-Funktion) handeln könnte. - Für die Punkte des Graphen dieser Funktion wird die Gleichung

$$(4.64) \quad c_i^+ = k_{17} \cdot e^{k_{18} \cdot t}$$

angesetzt, in der "e" die Basis der natürlichen Logarithmen symbolisiert.

Wie die folgende Gleichung zeigt, ist k_{17} die Anzahlkonzentration zu Beginn der Reaktion:

$$(4.65) \quad t_1 = 0 \Rightarrow c_1^+ = c_A^+ = k_{17} \cdot e^{k_{18} \cdot 0} = k_{17} \cdot 1 = k_{17}$$

An Stelle der Gleichung 4.64 kann also geschrieben werden

$$(4.66) \quad c_i^+ = c_A^+ \cdot e^{k_{18} \cdot t_i}$$

Zur Beseitigung des Exponenten in dieser Gleichung wird diese im allgemeinen ohne Bedenken logarithmiert:

$$(4.67) \quad \lg c_i^+ = \lg c_A^+ + k_{18} \cdot t_i \cdot \lg e.$$

Da Logarithmen nach der am weitesten verbreiteten Auffassung nur von Zahlen, nicht aber von Größen definiert sind, wird ein Ausdruck der Art "lg " den heutigen Gepflogenheiten des Größenrechnens nicht gerecht. Sollen diese beachtet werden, darf hinter dem Logarithmuszeichen nur ein Zahlzeichen stehen. Das ist im Falle der Gleichung 4.67 leicht zu erreichen, indem man in ihr die Anfangskonzentration " c_A^+ " vor dem Logarithmieren auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt:

$$(4.68) \quad \lg (c_i^+ / c_A^+) = k_{18} \cdot t_i \cdot \lg e$$

Wird

$$(4.69) \quad k_{18} \cdot \lg e = k_{19}$$

gesetzt, ergibt sich

$$(4.70) \quad \lg (c_i^+ / c_A^+) = k_{19} \cdot t_i$$

Wir berechnen die Verhältnisse " c_i^+ / c_A^+ " (Spalte 4 der Tabelle 4.5) und deren Logarithmen (Spalte 5) und tragen die berechneten Logarithmen in einem t - $\lg(c_i^+ / c_A^+)$ -Koordinatensystem über den Reaktionsdauern ab c (Bild 4.9).

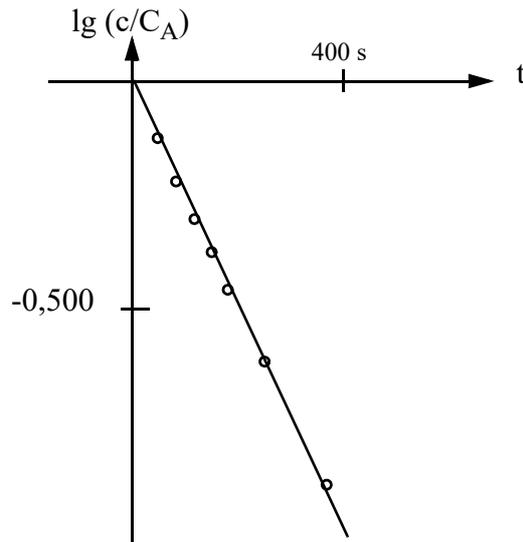


Bild 4.9. Noch einmal: Zur Änderung der Konzentration einer Salzsäure bei einer Reaktion mit Magnesium in Abhängigkeit von der Reaktionsdauer

Es ergibt sich eine Gerade. Damit ist der Ansatz 4.64 beziehungsweise 4.70 als zutreffend erwiesen. - Der Anstiegsfaktor k_{19} ($=k_{18} \cdot \lg e$) wird dem Bild 4.9 beziehungsweise der Tabelle 4.5 entnommen. Nehmen wir die Ausmaße der Zeilen 7 und 1, erhalten wir

$$(4.71) \quad k_{19} = \frac{\lg(c_1^+ / c_A^+) - \lg(c_A^+ / c_A^+)}{t_1 - t_A} = \frac{-0,597 - 0}{281,6 \text{ s} - 0} = -2,12 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Damit ist

$$(4.72) \quad k_{18} = k_{19} / \lg e = \frac{-2,12 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}}{0,4343} = -4,88 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Und damit gilt für den untersuchten Vorgang schließlich die Proportionalität (gemäß 4.66)

$$(4.73) \quad c^+ \sim 16,0 \cdot 10^{-5} \text{ hen/ml} \cdot e^{-4,88 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \cdot t}$$

(Das Ausmaß für c_A^+ ist der Tabelle 4.5 entnommen.)



