3. Gleichungs-Proportionalitäten-Implikate als Sondergesetzesaussagen Die speziellen Gasgesetze

3.1. Im Physikunterricht werden auch Gesetze von der Art des BoyleMariotte-Gesetzes verwendet, das traditionell in der folgenden Form geschrieben wird:

(3.1) $p \bullet V = \text{konst } (= k_2)$:

Das Druck-Volumen-Produkt einer Portion eines (idealen) Gases (genau: eines gasigen Molekülaggregats [Abschnitt 8] - die ˙einatomigen Moleküle˙ der Edelgase eingeschlossen) ist konstant (hat ein konstantes Ausmaß).

Ein ideales Gas ist ein Gas im Idealzustand, das heißt: ein Gas, dessen Thermie viel größer ist als seine Siede- beziehungsweise Kondensationsthermie und dessen Druck möglichst klein ist. Diese Bedingung wird (schon bei der Raumthermie und beim atmosphärischen Umgebungsdruck) am besten von Helium (und anderen Edelgasen) erfüllt, in guter Annäherung aber auch von Wasserstoff (und auch von Stickstoff und Sauerstoff).

Das Symbol "k_2" (in der Gleichung 3.1) wird verwendet, weil bei der Besprechung des Fallgesetzes (Abschnitt 1) für die dort aufgetretene Gesetzeskonstante das Symbol "k_1" benutzt wurde.

Zur Gleichung 3.1 sind zwei Anmerkungen zu machen.

(1) Die Gleichung beschreibt die Gesetzmäßigkeit im Ablauf eines Vorgangs sehr undeutlich. Wollen wir mit einer Formel arbeiten, die den Vorgang der Verdichtung beziehungsweise Entspannung einer Gasportion deutlicher beschreibt, ist die Gleichung nach V aufzulösen und durch eine Proportionalität zu ersetzen.

(3.2) $V \sim k_2 \bullet 1/p$:

Das Volumen einer (idealen) Gasportion ändert sich beim Zusammendrücken und Entspannen proportional mit dem Kehrwert des Druckes, also so, daß das Druck-Volumen-Produkt konstant bleibt (Gleichung 3.1).

Vor der zweiten Anmerkung zur Gleichung 3.1 ist noch eine semantische Anmerkung zur vorstehenden verbalen Gesetzesaussage zu machen: Der übliche Name "Kehrwert des Druckes" bildet das Gemeinte nicht zutreffend ab. Wenn der Druck (p) in der bis heute gebräuchlichen Ausdrucksweise eine «Größenart» ist und der «Wert des Druckes» ein «Größenwert» (p_i) dann sollte auch der Name "Kehrwert des Druckes" einen «Größenwert» meinen ($1/p_i$) und nicht eine «Größenart» (1/p). Die Argumentengröße in der Proportionalität 3.2 (also in einer Aussage über die gesetzmäßige Änderung einer Größe während eines Vorgangs und nicht in einer Bestimmungsgleichung für das Größenausmaß in einem bestimmten Vorgangsstadium) ist aber eine «Größenart» (und nicht ein «Größenwert»), nämlich die Kehrgröße des Druckes (1/p). Ich werde deshalb im folgenden an Stelle des Wortes "Kehrwert" den Namen "Kehrgröße" verwenden.

Der Wortteil "Kehr-" soll im Namen "Kehrgröße" in gleicher Weise wie im Namen "Kehrwert" zum Ausdruck bringen, daß nicht die Größe "Druck, p", sondern die Größe "1/Druck, 1/p" bezeichnet wird.

Die Kehrgröße des Druckes ist eine (Ersatz-)Größe eigener Art mit eigenen (Ersatz-)Einheiten der Art "1 Pa^{-1}". Sie ist so wenig der «Kehrwert eines Druckes», so wenig zum Beispiel der sogenannte Brechwert einer optischen Linse, der in der (Ersatz-)Einheit "1 m^{-1}" angegeben wird /16/, physikalisch gesehen der «Kehrwert einer Länge» ist.

Der Name "Kehrgröße des Druckes" (statt "Kehrwert des Druckes") ermöglicht - ebenso wie der Name "Ausmaß einer Größe" (statt "Wert einer Größe") - , das Wort "Wert" in der Kalkülsprache nur für Waren- und Geldwerte (monetäre Werte) zu verwenden (Abschnitt 5).

Der Name "reziproker Druck" (statt "Kehrgröße des Druckes") ist sprachlich ebenfalls unangemessen. Denn erstens ist ein «reziproker Druck» sprachlich gesehen nichts anderes als ein (lediglich näher gekennzeichneter) Druck, und zweitens hat "reziprok" die Bedeutung "wechselseitig aufeinander bezogen" und bildet deshalb die wesentliche Quotientenbildung (p --> 1/p) sprachlich schlechter ab als der Name "Kehrgröße des Druckes".

Das für die Kehrgröße des Druckes Gesagte gilt für die «Kehrwerte» aller Größen. Diese sollten - solange für sie noch keine eigenen Namen gefunden sind - alle als "Kehrgrößen" bezeichnet werden.

(2) Das von der Boyle-Mariotte-Gleichung gemeinte Gesetz (Proportionalität 3.2) hat keine so allgemeine Gültigkeit wie beispielsweise das Gravitationsgesetz. Wird die Thermie der Gasportion geändert, ändert sich auch das Druck-Volumen-Produkt "k_2"; und wird mit einer Gasportion einer anderen Größe gearbeitet, hat die Größe "k_2" ebenfalls ein anderes Ausmaß.

Man beachte die Mehrdeutigkeit des Wortes "Größe": Die Gasportion hat eine bestimmte Größe; die Konstante "k2" ist eine bestimmte Größe. - Das Wort in seiner ersten Bedeutung ist unentbehrlich. Man muß sagen können, daß etwas groß oder klein ist. Es ist deshalb ratsam, den Namen "Größe" in der Bedeutung "physikalische Größe" in Frage zu stellen, und zwar auch deshalb, weil man etwas, was groß oder klein sein kann, in einer rationalen Fachsprache nicht als "Größe" bezeichnen sollte. (Man vergleiche hierzu die Ausführungen in den Abschnitten 8 und 9.)

Die Konstante „k_2" ist also wohl eine Gesetzeskonstante, aber eine spezielle. Sie gilt nur für eine Gasportion bestimmter Größe und bestimmter Thermie. Die Proportionalität 3.2 beschreibt also nur eine Gesetzmäßigkeit im Ablauf eines speziellen Vorgangs, nämlich der isothermen Druckänderung einer bestimmten Gasportion bestimmter Thermie. Sie ist also ein spezielles oder ein Sondergesetz. Vor allem aber ist folgendes zu beachten: Da die Proportionalität nur unter bestimmten Bedingungen (Voraussetzungen) gilt, sind diese in einer zutreffenden Formulierung des Sondergesetzes auch anzugeben. Sollen die Bedingungen nicht nur verbal im Kontext vermerkt werden, ist an Stelle der in 3.2 allein formulierten Proportionalität ein Implikat zu schreiben,

(3.3) $\quad N = N_\mathrm{i}\ (= \mathrm{const}) \wedge T = T_\mathrm{i} \Rightarrow V \sim \mathrm{k}_2(N,T) \bullet 1/p$:

Wenn die Anzahl der Molekülmenge konstant ist und wenn die Thermie konstant ist, dann ändert sich das Volumen proportional mit der Kehrgröße des Drucks.

Der Proportionalitätsfaktor "k_2" ist nur so lange konstant, so lange auch N und T konstant sind; er ändert sich also, wenn sich N und/oder T ändert. k_2 ist also eine Funktion (eine abhängige Veränderliche) dieser beiden Größen: $k_2 = f(N, T)$. Dieser Sachverhalt wird verkürzt durch das Symbol "$k_2(N,T)$" zum Ausdruck gebracht.

Mit dem Implikat 3.3 wird uns eine dritte Art von Gesetzesaussagen bewußt, nämlich ein Implikat aus einer oder mehreren Bedingungsgleichungen und einer Gesetzesproportionalität. - Während in Gesetzen von der Art des (zutreffend formulierten) Hebelgesetzes zwei Gleichungen (die zwei sich gegenseitig bedingende Zustände beschreiben) aussagenlogisch miteinander verknüpft sind, sind in Sondergesetzen von der Art der speziellen Gasgesetze eine Proportionalität und eine oder mehrere Gleichungen aussagenlogisch miteinander verknüpft; im

Implikat dieser zweiten Art beschreibt die Proportionalität einen unter bestimmten Bedingungen gesetzmäßig ablaufenden Vorgang, und geben die Gleichungen die einschränkenden Bedingungen an.

Wird im folgenden Unterrichtsschritt die Abhängigkeit des Volumens einer Gasportion von deren Druck und deren Thermie untersucht (die Thermie also nicht konstant gehalten), ergibt sich das allgemeinere Implikat

(3.4) $\quad N = N_i \Rightarrow V \sim k_3(N) \cdot T/p$:

Wenn die Anzahl der Molekülmenge konstant ist, ändert sich das Volumen sowohl proportional mit der Kehrgröße des Druckes wie auch proportional mit der Thermie; der Proportionalitätsfaktor ‚k_3" ist nur noch eine Funktion von N und bleibt deshalb so lange konstant, so lange sich N nicht ändert, so lange also zum Beispiel kein Wasserdampf in einen Dampfmaschinenzylinder beziehungsweise kein Benzindampf-LuftGemisch in einen Ottomotorenzylinder einströmt oder aus diesem ausströmt.

Wenn in einem weiteren Unterrichtsschritt auch die Abhängigkeit des Volumens von der Anzahl der Molekülmenge berücksichtigt (also mit Gasportionen verschiedener Größen gearbeitet) wird, ergibt sich die noch allgemeinere Proportionalität

(3.5) $\quad V \sim k_4 \cdot N \cdot T/p$:

Das Volumen aller Portionen (idealer Gase) ändert sich proportional mit der Anzahl der Molekülmenge, proportional mit der Thermie und proportional mit der Kehrgröße des Druckes.

Erst diese Proportionalität ist - wegen des Fortfalls aller mathematisch formulierten Einschränkungen - nicht mehr zu einem Implikat zu ergänzen. Sie ist für sich allein eine für ideale Gase gültige Gesetzesaussage.

Mit einer Änderung der Anzahl der Molekülmenge ändert sich nicht allein die (eine Gasportion mit kennzeichnende) Anzahl der Molekülmenge, sondern auch die Gasportion selbst. Eine Gasportion, deren Molekülmenge die Anzahl "N_1" hat, ist eine andere Gasportion, als eine isomolekulide Gasportion, deren Molekülmenge die Anzahl "N_2" hat. Man kann den Übergang von einer Gasportion einer bestimmten Größe zu einer isomolekuliden Gasportion einer anderen Größe mathematisch aber durchaus so behandeln, als wären die Anzahlen der beiden Gasportionen die Anzahlen einer einzigen (hypothetisch erhalten bleibenden) Gasportion in zwei verschiedenen Stadien einer Anzahländerung - so wie zwei Thermien einer Gasportion die Thermien in zwei Stadien einer Thermieänderung sind.

Die Konstante

(3.6) $\quad k_4 = (p_i \cdot V_i) / (N_i \cdot T_i)$

ist eine allgemein gültige Naturkonstante. Sie wird "Boltzmann-Konstante" genannt und mit dem indexlosen Buchstaben "k" symbolisiert.

Das genaue Ausmaß dieser Konstanten findet man nur, wenn man mit Gasportionen experimentiert, deren Thermie erheblich größer ist als die Siedethermie des betreffenden Gases. Da Helium von allen Gasen die niedrigste Siedethermie hat, werden wichtige Experimente vor allem mit diesem Gas durchgeführt. - Als genauestes Ausmaß dieser Konstanten gilt der im Jahre 1986 im «konsistenten Satz von Fundamentalkonstanten» festgelegte «Bestwert»

(3.7) $\quad k = 1{,}380\,658(12) \cdot 10^{-23}$ J/K.

Für die meisten praktischen Arbeiten genügt das abgerundete Ausmaß

(3.7.1) $k = 1{,}38\ 10^{-23}$ J/K.

Dieses kann auch bei Experimenten mit Wasserstoff gefunden werden.

Wird als Zähleinheit nicht die Zahl "1" benutzt, sondern die Zahl "$6{,}02 \bullet 10^{23}$ = 1 hen", ergibt sich für k:

(3.7.2) $k = 6{,}02\ 10^{23} \bullet 1{,}38 \bullet 10^{-23}$ J / (K • $6{,}02 \bullet 10^{23}$) = 8,31 J/(K • hen).

Die Proportionalität 3.5 wird nicht nur in dieser Arbeit verwendet; vor der Einführung der Stoffmenge "n" wurde sie auch in der Physik benutzt. - Sie wurde allerdings nicht als Proportionalität formuliert, sondern als Gleichung mit indexlosen Formelbuchstaben, und zwar (nicht mit dem Symbol "N", sondern) mit dem Symbol "n" für die **Anzahl**:

(3.7.3) $p \bullet V = k \bullet n \bullet T$.

Seit der gesetzlichen Einführung der Stoffmenge "n" wird (nicht nur in der Chemie, sondern) auch in der Physik die Gleichung

(3.7.4 $p \bullet V = R \bullet n \bullet T$

benutzt. In diese wird die Stoffmenge "n" in der Einheit "1 mol" (1 mmol, 1 kmol) eingesetzt. Die Gesetzeskonstante

(3.7.5) $R = (p_i \bullet V_i) / (N_i \bullet T_i)$ = 8,31 J/(K • mol)

wird als "universelle Gaskonstante" bezeichnet.

Aus der vorstehend genannten Einschränkung des Anwendungsbereichs der Proportionalität 3.5 auf ideale Gase folgt nicht, daß die Konstante "k" nicht allgemein gültig sei. Nicht allgemein gültig ist nur die Proportionalität 3.5. Nur diese gilt lediglich für ideale Gase. Bei realen Gasen muß sowohl dem Druck (wegen der gegenseitigen Anziehung der Moleküle des Gases) wie auch dem Volumen (wegen des Eigenvolumens dieser Moleküle) noch je ein (von der Art des Gases abhängiges) additives Glied zugefügt werden. (Über additive Glieder in Gesetzesaussagen siehe den Abschnitt 4.) Die mit diesen Gliedern formulierten Gesetze werden als "reale Gesetze" bezeichnet. - Die in der Proportionalität 3.5 noch zu beachtende Einschränkung, daß das Gas ideal sein muß, kann nur verbal (also im Kontext und nicht in mathematischer Form) mitgeteilt werden. Diese Bedingung ist deshalb weder in den Sondergesetzen noch im allgemeinen Gasgesetz mathematisch mitformuliert.

Die als lmplikate geschriebenen Sondergesetze zeigen den Schülern unmittelbar, daß diese nicht allgemein gültig sind. Das kann in den Schülern den Wunsch wecken, das allgemein gültige Gesetz zu finden, und motiviert damit weitere Untersuchungen. Wenn diese zu schwierig sind, als daß sie gleich durchgeführt werden könnten, bleibt den Schülern immerhin bewußt, daß es noch ein allgemeineres Gesetz geben muß und daß damit ihr Wissen auf dem betreffenden Gebiet noch begrenzt ist. Die Schüler werden durch die Implikatschreibweise außerdem davor bewahrt, beim Ableiten eines allgemeineren Gesetzes aus mehreren Sondergesetzen die Bedingungen zu vergessen, unter denen die einzelnen Sondergesetze nur gelten. - Es ist wohl allen Fachlehrem bekannt, wie leicht die Lernenden aus den beiden (üblicherweise) unvollständig formulierten Sondergesetzen

(3.8) $p \sim p_0 \bullet (1 + \alpha \bullet t)$ und

(3.9) $V \sim V_0 \bullet (1 + \alpha \bullet t)$

die unzutreffende Beziehung

(3.10) $p \bullet V \sim p_0 \bullet V_0 \bullet (1 + \alpha \bullet t)^2$

folgern und nicht die zutreffende

(3.11) $p \bullet V \sim p_0 \bullet V_0 \bullet (1 + \alpha \bullet t)^1$.

Die Schüler sind so gut wie nie in der Lage, das allgemeinere Gesetz 3.11 aus den Sondergesetzen 3.8 und 3.9 selber richtig abzuleiten oder auch nur die mit intensiver Hilfe des Lehrers durchgeführte Ableitung über längere Zeit im Gedächtnis zu behalten.

Würden die mit den Proportionen 3.8 und 3.9 gemeinten Sondergesetze zutreffend formuliert,

(3.12) $N = N_i \wedge ; V = V_i \Rightarrow p \sim p_0 \bullet (1 + \alpha \bullet t)$ und

(3.13) $N = N_i \wedge p = p_i \Rightarrow V \sim V_0 \bullet (1 + \alpha \bullet t)$,

würden die Schüler nicht so leicht dazu verleitet, die Proportionalität für den veränderlichen Druck, die nur gilt, wenn das Volumen konstant ist (3.12), und die Proportionalität für das veränderliche Volumen, die nur gilt, wenn der Druck konstant ist (3.13), ohne weiteres Nachdenken miteinander zu multiplizieren.

Welche Schwierigkeiten bei der Ableitung der verschiedenen Gasgesetze und insbesondere des (für die Chemie grundlegend wichtigen) Avogadro-Gesetzes (Abschnitt 8) tatsächlich zu meistern sind, ist aus der in /6/ präzise und ohne Gedankenlücken durchgeführten Ableitung zu ersehen.

Es sei noch angemerkt, daß die proportionale Änderung des Volumens mit der Anzahl der Molekülmenge (siehe die Proportionalität 3.5) nicht experimentell ermittelt wird. Sie ist eine denknotwendige Annahme. Wir können gar nicht anders, als anzunehmen, daß eine Gasportion 1, die zweimal so groß ist wie eine Portion 2 (also eine zweimal so große Masse oder - bei gleichem Druck und gleicher Thermie - ein zweimal so großes Volumen hat), auch aus zweimal so vielen Molekülen besteht. - Dieses Postulat wird nicht bewiesen, sondern ist seinerseits die - oft unbewußt gemachte - Voraussetzung vieler Überlegungen.

3.2. Im Abschnitt 2 und in diesem Abschnitt sind wichtige Vorteile der Implikatschreibung deutlich geworden. Ich wiederhole und ergänze sie.

(1) Implikate bilden eine gesetzmäßige Beziehung auch in denjenigen Fällen zutreffend ab, in denen das eine einzelne Gleichung nicht kann.

(2) Implikate sagen dem Kommunikationspartner (und insbesondere dem Lernenden) unmittelbar und in mathematisch präziser Weise, was gemeint ist; das Gemeinte braucht dann nicht allein durch eine Verbalaussage, an die später oft nicht mehr gedacht wird, mitgeteilt zu werden.

(3) Implikate machen bewußt, daß ˙Gesetze˙ von der Art des ˙Hebelgesetzes˙ (in der üblichen Schreibung) keine Gesetze sind, sondern lediglich Bedingungsgleichungen, die erst im Kombinat mit einer jeweils zweiten Bedingungsgleichung ein Gesetz ergeben, oder daß Gesetze von der Art der speziellen Gasgesetze nicht allgemein gültige Gesetze, sondern nur unter bestimmten Voraussetzungen gültige Sondergesetze sind.

(4) Implikate helfen, geeignete Namen sowohl für die Bedingungsgleichungen wie auch für die tatsächlichen Gesetze zu finden („Reaktionsstillstandsbedingung", "Reaktionsstillstandsgesetz").

(5) Implikate, die gefundene Proportionalitäten als Sondergesetze ausweisen, können den Wunsch wecken, ein allgemeineres Gesetz zu finden, und motivieren damit weitere Untersuchungen.

(6) Implikate machen bei jedem Gebrauch den gesamten Sachverhalt bewußt und prägen diesen damit dem Gedächtnis ein.

(7) Die Formulierung von Gesetzen auch in Form von Implikaten zeigt deutlicher als die alleinige Verwendung einzelner Gleichungen, daß es Gesetze unterschiedlicher Arten gibt, nämlich

- Gesetze, die den ohne einschränkende Bedingungen erfolgenden Ablauf von Vorgängen beschreiben - dargestellt durch eine allgemein gültige Proportionalität,
- Gesetze, die den unter bestimmten Bedingungen erfolgenden Ablauf von Vorgängen beschreiben - dargestellt durch ein Implikat aus einer Sondergesetzesproportionalität und einer oder mehreren Bedingungsgleichungen, und
- Gesetze, die den Bedingungszusammenhang zweier sich gegenseitig bedingender Zustände (im Ablauf einer Veränderung) beschreiben - dargestellt durch ein Implikat aus zwei als Bedingungsgleichungen fungierende Zustandsgleichungen.

(8) Die Schüler wenden die im Mathematikunterricht erarbeiteten aussagenlogischen Formalismen auch in einem anderen Unterrichtsfach an und brauchen nicht zu glauben, daß die Aussagenlogik nur für die Mathematik von Belang sei.

(9) Der Gebrauch von Implikaten erfüllt ein Bedürfnis der Schüler, das oft zu wenig beachtet wird. - Die Schüler arbeiten lieber und erfolgreicher mit einem umständlicheren, den Sachverhalt aber vollständig und damit zutreffend abbildenden Formalismus als mit einem einfacheren, dem Sachverhalt dann aber notwendig nicht angemessenen. Das Bedürfnis nach logischer und methodologischer Klarheit ist bei den Schülern - jedenfalls bei einer entsprechenden Unterrichtsführung - größer, als oft angenommen wird.

(10) Die lmplikatschreibung kommt auch einer wissenschaftstheoretischen Forderung entgegen. - Durch die explizite Angabe der Bedingungsgleichungen in den Implikaten für Sondergesetze wird das Verständnis dafür geweckt, daß jeder Naturvorgang ein spezieller Vorgang ist: Jeder Vorgang läuft unter bestimmten Bedingungen ab, und zwar gleichgültig, ob wir diese mathematisch formulieren (wie die Druck- und die Thermiebedingungen bei thermischen Vorgängen) oder nur verbal (wie die Bedingung, daß sich ein Gas im Idealzustand befinden muß) oder überhaupt nicht (wie zum Beispiel beim Gravitationsgesetz, bei dem den Lernenden kaum deutlich genug bewußt gemacht werden dürfte, daß es nur für Zweikörpersysteme gilt). Jedes einzelne Naturgeschehen wird also nicht nur durch allgemein gültige Naturgesetze, sondern auch durch die jeweiligen Bedingungen bestimmt (determiniert). Trotzdem wird im Unterricht über die letzteren nur wenig gesprochen. Und im Wissenschaftlerjargon werden sie im allgemeinen zu «Randbedingungen» abgewertet. Wollen wir zutreffend erkennen, wie das Naturgeschehen abläuft, haben wir (aber) die jeweiligen Bedingungen genauso ernst zu nehmen wie die Vorgangsproportionalitäten. Die Grundfrage der Naturforschung lautet nach heutiger wissenschaftstheoretischer Auffassung nicht "Wie läuft ein Vorgang ab?", sondern "Nach welchen Gesetzmäßigkeiten und auf Grund welcher Bedingungen kommt das jeweilige Phänomen zustande?".

Die Frage "Warum läuft ein Vorgang ab?" ist - entgegen oft zu hörender Aussagen - keine naturwissenschaftliche, sondern eine metaphysische Frage. Auf sie gibt es nur eine einzige, und zwar nicht falsifizierbare und eben deshalb metaphysische Antwort: Weil eine Kraft (ein Trieb, ein Motiv) wirkt.

$\rightarrow$