8. Rechnen mit Vektoren und mit Axoren. Winkelfunktionen und Winkelfunktionsaxoren

8.1. Die Vektoren sind hervorragend geeignet, physikalische und technische Sachverhalte zeichnerisch darzustellen, physikalische Gesetze elegant abzuleiten und zu formulieren und wichtige Ersatzgrößen differenzierter zu symbolisieren, als dies mit Skalaren und Axoren allein möglich ist. Viele neue Erkenntnisse wurden nur mit Hilfe von Vektoren gefunden. Die (auch als "Tensoren 1. Stufe" bezeichneten) Vektoren /11/ sind deshalb in Physik und Technik unentbehrlich und werden in der (Grund-) Norm DIN 1313 /14/ - zusammen mit den Skalaren ("Tensoren nullter Stufe") und Tensoren ("Tensoren 2., 3., 4, ... Stufe") - als "physikalische Größen" bezeichnet. Aus diesem Namen könnte man schließen, daß man mit Vektoren im Größenkalkül in gleicher Weise rechnen könne wie mit Skalaren und Axoren. Das ist aber nicht der Fall, da für Vektoren zum Teil andere Rechengesetze gelten als für Zahlen, Skalare und Axoren. (Dies ist auch ein wichtiger Grund dafür, daß ich für die orientierten Sagittare den Namen "Axoren" verwende und nicht einen Namen wie ˙axiale Vektoren˙.) Man kann wohl mit Vektoren gemäß den Gesetzen der Vektorrechnung arbeiten; man kann mit ihnen aber nicht in das eingehen, was man allein als "Größenkalkül" bezeichnen sollte. In diesem kann man nicht mit den Vektoren als solchen rechnen, sondern nur mit deren Konstituenten "polare Ausmaßgröße" und "Richtung" (genau: "polare Ausmaßgröße und polare Winkelfunktion") und mit den Axoren dieser Größen. Man rechnet im Größenkalkül also zum Beispiel mit der Kraft *F* und dem Kosinus oder dem Sinus des Winkels α [*cos* (α); *sin* (α)] und mit dem Kraftaxor $\overrightarrow{F}$ und dem Kosinus- oder Sinusaxor [$\overrightarrow{cos}$ (α); $\overrightarrow{sin}$ (a)]. (Die Kursivschreibung der Symbole "*cos*" und "*sin*" wird im Unterabschnitt 8.3 begründet.)

Um diese Aussagen so erläutern zu können, daß auch denjenigen Lesern ein Mitdenken möglich ist, denen das Umgehen mit Vektoren wenig oder nicht geläufig ist, muß ich auf das Rechnen mit Vektoren (und insbesondere das Zusammensetzen von Vektoren zu Resultierenden und das Zerlegen von Vektoren in Komponenten) sowie auf das Rechnen mit Winkelfunktionen und Winkelfunktionsaxoren näher eingehen.

Vektoren sind Eigenschafts-Relations-Kombinate, deren eine Konstituente ein Sagittar und deren andere Konstituente eine Richtung in einem Koordinatensystem ist. (Die zweite Konstituente ist ihrerseits ebenfalls ein Kombinat, und zwar das Kombinat der beiden Konstituenten "Lage in einem Koordinatensystem" und "Gleitsinn hinsichtlich eines Bezugsgleitsinns".) Der Vektor wird zeichnerisch dargestellt durch einen Pfeil, der eine bestimmte (das Ausmaß des Sagittars darstellende) Länge hat und der die Achsen eines Koordinatensystems unter bestimmten Winkeln schneidet.

Zum experimentell leicht zu realisierenden Zusammensetzen und Zerlegen von Vektoren kann man zum Beispiel von der empirisch festzustellenden Tatsache ausgehen

- daß sich zwei (oder mehr) Kräfte überlagern (superponieren) können, ohne sich in ihrer Wirkung zu stören, so daß sie durch eine einzelne Kraft ersetzt werden können, die die gleiche Wirkung hat wie die beiden Einzelkräfte zusammen, und
- daß eine Kraft in zwei (oder mehr) Komponenten zerlegt werden kann, die zusammen die gleiche Wirkung haben wie die einzelne Kraft.

Im Falle der zeichnerischen (geometrischen) Zusammensetzung (˙Addition˙) zweier Kraftvektoren $\vec{F}$ (1) und $\vec{F}$ (2) ergibt sich der Pfeil für den resultierenden Kraftvektor $\vec{F}$ (R) als Diagonale des Kraftvektorenparallelogramms («Kräfteparallelogramms»), das die Pfeile der Vektoren $\vec{F}$ (1) und $\vec{F}$ (2) aufspannt (Bild 8.1, Teilbild 1).

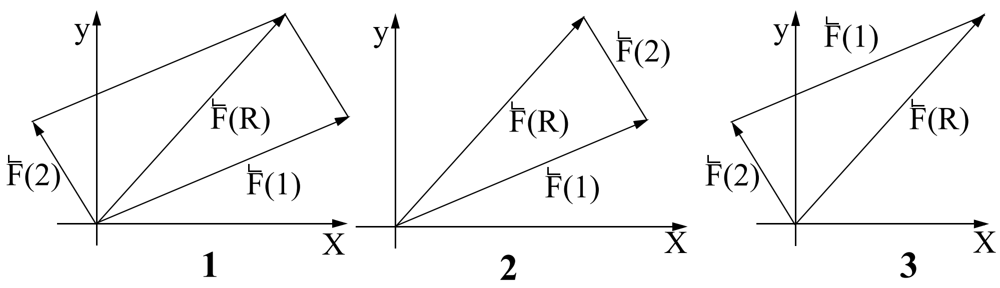


Bild 8.1. Zusammensetzen der beiden Kraftvektoren $\vec{F}$ (1) und $\vec{F}$ (2) zum resultierenden Kraftvektor $\vec{F}$ (R)

Der resultierende Vektor kann auch gefunden werden, indem man den Startpol des Vektors $\vec{F}$ (2) an den Zielpol des Vektors $\vec{F}$ (1) ansetzt und den Startpol des Vektors $\vec{F}$ (1) mit dem Zielpol des Vektors $\vec{F}$ (2) verbindet (Teilbild 2) oder indem man den Startpol des Vektors $\vec{F}$ (1) an den Zielpol des Vektors $\vec{F}$ (2) ansetzt und den Startpol des Vektors $\vec{F}$ (2) mit dem Zielpol des Vektors $\vec{F}$ (1) verbindet (Teilbild 3).

Die letzten beiden Möglichkeiten der zeichnerischen Addition zeigen, daß für die Addition von Vektoren (ebenso wie für die von Zahlen, Skalaren und Axoren) ein Vertauschungsgesetz der Addition gilt:

(8.1) $\vec{F}(1) + \vec{F}(2) = \vec{F}(2) + \vec{F}(1)$

Im Falle der zeichnerischen Zerlegung eines Kraftvektors $\vec{F}$ (3) (Bild 8.2) ergeben sich die Pfeile für die Vektorkomponenten vorgegebener Richtung, indem man durch den Startpol des Vektors $\vec{F}$ (3) die Achsen a und b in den vorgegebenen Richtungen und dann durch den Zielpol dieses Vektors die zu den Achsen a und b parallelen Achsen a' und b' zeichnet und die Schnittpunkte der Achsen a und b mit den Achsen a' und b' als Eckpunkte eines Kraftvektorenparallelogramms betrachtet: Die vom Startpol des Vektors $\vec{F}$ (3) ausgehenden gerichteten Seiten dieses Parallelogramms sind dann die Pfeile für die Vektorkomponenten $\vec{F}_a$ (3) und $\vec{F}_b$ (3).

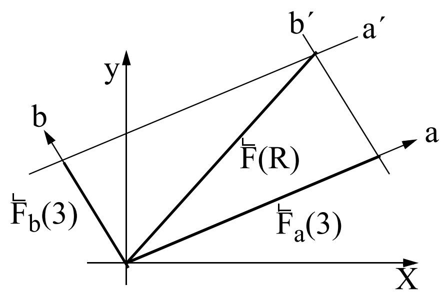


Bild 8.2. Zerlegen des Kraftvektors $\vec{F}$ (3) in zwei Komponenten $\vec{F}_a$ (3) und $\vec{F}_b$ (3), die die gleiche Richtung haben wie zwei vorgegebene Achsen a und b.

Ebenso wie Kräfte überlagern sich auch Bewegungen (und zwar nicht nur Gleitbewegungen), ohne sich gegenseitig zu stören. Wenn beispielsweise ein Schiff mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$(1) über den Grund eines Gewässers fährt und gleichzeitig ein Mensch mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$(2) über das Deck des Schiffes geht (Bild 8.3), bewegt sich der Mensch insgesamt mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$(R) über den Grund des Gewässers. Dieser Vektor kann (wie der resultierende Vektor zweier Kräfte [Bild 8.1]) auch gefunden werden, indem man die Vektoren $\vec{v}$(1) und $\vec{v}$(2) unter Beachtung ihrer Richtungen aneinander setzt. Das Anzeichnen des Pfeils $\vec{v}$(2) an den Pfeil $\vec{v}$(1) veranschaulicht gewissermaßen den Fall, daß sich zuerst nur das Schiff über den Gewässergrund und erst dann der Mensch über das Schiff bewegt; das Anzeichnen des Pfeils $\vec{v}$(1) an den Pfeil $\vec{v}$(2) veranschaulicht den Fall, daß sich zuerst nur der Mensch und erst dann das Schiff bewegt. In allen drei Fällen kommt der Mensch am gleichen Ort über dem Gewässergrund an.

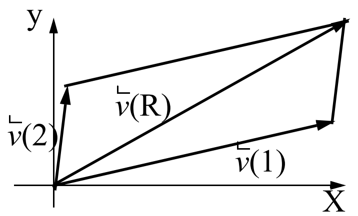


Bild 8.3. Zusammensetzen zweier Geschwindigkeitsvektoren zu einer Resultierenden

In gleicher Weise wie Kraft- und Geschwindigkeitsvektoren können Größenvektoren aller Arten zusammengesetzt und zerlegt werden.

Bei der zeichnerischen Addition können das Ausmaß *F*(R) des Vektors $\vec{F}$(1) und dessen Anstiegswinkel α(R) nur ungefähr ermittelt werden. Wenn *F*(1) = 6,00 N ist, α(1) = 20,0°, *F*(2) = 4,00 N und α(2) = 120° (Bild 8.1), kann man einer Zeichnung im allgemeinen nur entnehmen, daß *F*(R) ungefähr 6,6 N ist und α(R) ungefähr 55 1/2°. Wenn die in die Rechnung eingehenden Größen genauer zu messen sind und auch genauer gemessen werden, als sie zeichnerisch entsprechend dargestellt werden könnten, ist es erforderlich, die Koordinaten des Zielpols des Vektors $\vec{F}$(R) nach den Regeln des Größenkalküls zu berechnen. Nur mit dessen Hilfe können die Koordinaten und dann mit deren Hilfe der «Betrag» des Vektors $\vec{F}$(R), also die Kraft *F*(R), und der Anstiegswinkel α genau berechnet werden.

8.2. Zwischen dem Rechnen mit Sagittaren und Axoren einerseits und dem mit Vektoren andererseits bestehen wichtige Unterschiede. Das sei zunächst am Beispiel der sogenannten algebraischen und der sogenannten vektoriellen Addition zweier Längen gezeigt. - Sind die Längen *l*(1) und *l*(2) [also nicht die Längenvektoren $\vec{l}$(1) und $\vec{l}$(2)] algebraisch zu addieren, ergibt sich

(8.2) $l(\mathrm{R}) = l(1) + l(2) = l(2) + l(1).$

Für *l*(1) = 8 m und *l*(2) = 4 m ergibt sich

(8.3) $l(\mathrm{R}) = 8\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{m} + 8\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}.$

In diese Addition gehen nur die Längen als solche ein, gleichgültig ob die die Längen darstellenden Strecken unmittelbar aneinander ansetzen oder nicht und auch gleichgültig ob die Strekken gleich gerichtet sind oder nicht. - Bei der vektoriellen Addition ist dagegen vorausgesetzt, daß die längendarstellenden Vektorpfeile entweder einen gemeinsamen Startpol haben oder daß einer der beiden Pfeile unmittelbar am Zielpol des anderen ansetzt. Und es ist nicht gleichgültig, um welchen Winkel sich die Richtungen der beiden Vektorpfeile unterscheiden. Wenn die «Beträge» der Vektoren 8 m beziehungsweise 4 m sind, ist die Ausmaßkonstituente des resultierenden Vektors $\vec{l}$(R) nur dann 12 m, wenn die (unmittelbar aneinander stoßenden) Einzelvektoren gleich gerichtet sind; in allen anderen Fällen ist die Ausmaßkonstituente des resultierenden Vektors kleiner als 12 m.

Der Sachverhalt, daß die Ausmaßkonstituente des Vektors $\vec{l}$(1) gleich 8 m ist, kann nicht durch die 'Gleichung' "$\vec{l}$(1) = 8 m" beschrieben werden, da der Vektor nicht nur eine Länge hat, sondern auch eine Richtung. Und diese wird durch die Angabe "8 m" nicht erfaßt. - Die einheitengebundene Angabe "8 m" kennzeichnet nur die Länge *l*(1) als solche, also das, was in der Vektorrechnung als der "Betrag des Vektors" bezeichnet und durch senkrechte Striche vor und hinter dem Vektorsymbol gekennzeichnet wird:

(8.4) $\quad |\vec{l}\,41)| = l(1) = 8$ m.

Der Ausdruck auf der linken Seite von 8.4 scheint überflüssig zu sein; tatsächlich ist er aber erforderlich, wenn nicht nur die Länge *l*(1) als solche angegeben, sondern außerdem noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden soll, daß diese Länge die Ausmaßkonstituente eines interessierenden Vektors $\vec{l}$(1) ist.

Würde nicht korrekt geschrieben "$|\vec{l}(1)|$ = 8 m", sondern "$\vec{l}$(1) = 8 m", würden die 'Gleichung' "$\vec{l}$(1) = 8 m" und die Gleichung "*l*(1) = 8 m" den unzutreffenden Schluß "$\vec{l}$(1) = *l*(1)" zur Folge haben.

Der vektoriellen Addition wird in der Vektorrechnung die Gleichung 8.1. zugeordnet. Diese Gleichung, in der Symbole für Vektoren stehen, die Ausmaß und Richtung erfassen, ist (im Vergleich zur folgenden Gleichung 8.6) sehr einfach. Sie nützt aber nichts, wenn die Länge *l*(R) des resultierenden Vektors $\vec{l}$(R) und dessen Anstiegswinkel α im konkreten Einzelfall (genau) berechnet werden sollen. Dann muß man sich 'von der Höhe der Vektorrechnung in die Niederung des Größenkalküls begeben'. - Die Berechnung kann sowohl mit Sagittaren wie auch mit Axoren durchgeführt werden.

Will man die Länge *l*(R) mit Hilfe von Sagittaren berechnen, wird der sogenannte Kosinussatz angewendet. Dieser lautet - wie hier ohne Begründung mitgeteilt sei - in der üblichen Schreibweise (bei der die Seite eines Dreiecks und die Länge dieser Seite mit ein und demselben Buchstaben symbolisiert werden) für die Länge c der Seite c eines beliebigen Dreiecks (Bild 8.4):

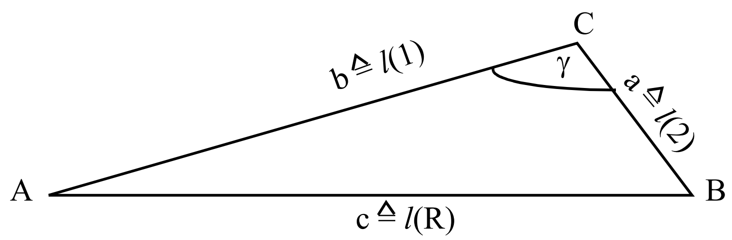


Bild 8.4. Zur Anwendung des Kosinussatzes

(8.5) $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$,

wenn γ der Winkel ist, den die Seiten a und b einschließen. Dieser Satz kann für die Berechnung von *l*(R) in der folgenden Weise umgeformt werden:

$$(8.6) \qquad l(\mathrm{R}) = \sqrt{l(1)^2 + l(2)^2 - 2 \bullet l(1) \bullet l(2) \bullet \cos(\gamma)}$$

Auf die Winkelfunktionen und insbesondere auf die für Winkel, die größer als 90° sind (siehe den Winkel γ in Bild 8.4), werde ich im Unterabschnitt 8.3 eingehen.

Die Gleichung 8.6 ist erheblich weniger elegant als die Gleichung 8.1, erlaubt aber, die resultierende Länge nach den Regeln des Größenkalküls (als algebraisch) exakt zu berechnen. - Wenn l(R) bekannt ist, kann man mit Hilfe der Gleichung 8.6 auch γ berechnen. Dieser Winkel ist aber nicht der Anstiegwinkel α des Vektors $\vec{l}$(R), sondern der Winkel, den die Vektoren $\vec{l}$(1) und $\vec{l}$(2) einschließen (Bild 8.4). Mit Hilfe des Kosinussatzes allein, der für jedes Dreieck gilt, gleichgültig wie dieses in einem Koordinatensystem gelagert ist, kann man die Richtung des Vektors $\vec{l}$(R) im Koordinatensystem also dessen zweite Konstituente, nicht berechnen. - Will man auch dies berechnen, ist nicht mit den Ausmaßgrößen "l" und "α" beziehungsweis "cos(α)" als solchen zu arbeiten, sondern mit deren Axoren.

Gleich gerichtete und entgegengesetzt gerichtete Vektoren aller Arten sind - unabhängig von ihrer jeweiligen Lage im Koordinatensystem - einander parallel und entweder gleich orientiert oder entgegengesetzt orientiert. Diese Tatsache ist wichtig für alle Fälle, in denen man gleichartige Vektoren, also zum Beispiel Kraftvektoren $\vec{F}$ in Komponenten zerlegt, die die gleiche Richtung haben wie die Koordinatenachsen x und y. Auch die Komponenten $\vec{F}_x$ und $\vec{F}_y$ sind gerichtete Größen, also ebenfalls Vektoren. Die Komponenten verschiedener Kraftvektoren, die ein und derselben Achse parallel sind, also zum Beispiel die Komponenten $\vec{F}_x$(1), $\vec{F}_x$(2), ..., sind einander parallel, haben also auch in Bezug aufeinander die gleiche Lage, aber nicht notwendig auch die gleiche Richtung; diese wird ja nicht nur von der Lage der Komponenten, sondern auch von deren Gleitsinn bestimmt. [Die Lage wird - wie vorstehend geschehen - durch einen (die Achse bezeichnenden) Index am Vektorsymbol gekennzeichnet.]

Das Zerlegen eines - wieder als Beispiel gewählten - Kraftvektors $\vec{F}$ in achsenparallele Komponenten, deren Lage nicht durch irgendwelche Achsen (zum Beispiel a und b in Bild 8.2), sondern durch die der Koordinatenachsen x und y vorgegeben ist, erfolgt in der in Bild 8.5 dargestellten Weise.

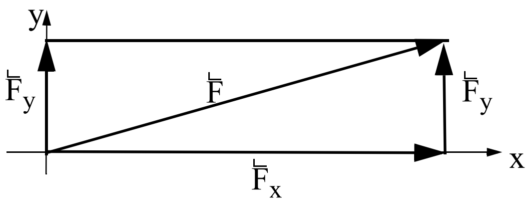


Bild 8.5. Zerlegen eines Kraftvektors $\vec{F}$ in die achsenparallelen Komponenten $\vec{F}_x$ und $\vec{F}_y$

Die achsenparallelen Pfeile der Vektorkomponenten sind gleich lang wie die Achsenabschnitte bis zum Fußpunkt der Lote, die vom Zielpol des Vektors auf die Koordinatenachsen gefällt werden. Sie sind also identisch mit den kartesischen Koordinaten des Zielpols des Vektors $\vec{F}$

Man lasse sich nicht irritieren, wenn in Bild 8.5 die Gegenkathete des rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel α (ebenfalls) mit "$\vec{F}_y$" bezeichnet wird, während man einen Vektor im allgemeinen so zerlegt, daß beide Komponenten vom gleichen Startpol ausgehen wie der Kraftvektor "$\vec{F}$", daß also die Komponente (im Falle des Bildes 8.5) auf der y-Achse liegt. Wie schon besprochen, brauchen bei der zeichnerischen Addition zweier Vektoren deren Startpole nicht zusammenzufallen; der Startpol des zweiten Vektors kann auch am Zielpol des ersten ansetzen. Dem entsprechend kann ein Vektor nicht nur so zerlegt werden, daß die Startpole der Komponenten zusammenfallen; er kann auch so zerlegt werden, daß der Startpol des zweiten Vektors ($\vec{F}_y$) am Zielpol des ersten ($\vec{F}_x$) ansetzt und dann nicht auf der y-Achse liegt, sondern - wie im Bild 8.5 gezeichnet - die Gegenkathete bezüglich des Winkels α ist. - In der Mathematik heißen zwei (freie) Vektoren $\vec{A}$ und $\vec{B}$ gleich, $\vec{A} = \vec{B}$, wenn ihre "Beträge" und Richtungen gleich sind, das heißt: wenn der Vektorpfeil $\vec{A}$ durch eine Parallelverschiebung mit dem Pfeil $\vec{B}$ zur Dekkung gebracht werden kann. Für den Mathematiker tritt deshalb an dieser Stelle von vornherein kein Problem auf.

Die Ausmaßkonstituenten dieser achsenparallelen Vektorkomponenten können leicht berechnet werden, da das Dreieck mit dem Winkel α rechtwinklig ist. Wir benötigen nur die Winkelfunktionen "Kosinus" und "Sinus".

Als "Winkelfunktion" bezeichnen wir zunächst das Verhältnis der Längen zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Durch dieses Verhältnis werden Winkelfunktionen nur für Winkel zwischen 0° und 90° definiert, da der Winkel α in einem rechtwinkligen Dreieck nicht größer als 90° sein kann. Erst später werden mit Hilfe des sogenannten Einheitskreises die Winkelfunktionen auch für Winkel definiert, die größer als 90° sind (Unterabschnitt 8.3).

Als "Kosinus" wird bei einem rechtwinkligen Dreieck - bezüglich eines der beiden nicht rechten Winkel - das Verhältnis "Länge der Ankathete A durch Länge der Hypotenuse H" bezeichnet und als "Sinus" das Verhältnis "Länge der Gegenkathete G durch Länge der Hypotenuse H":

(8.7) $\quad cos(\alpha) = l(\mathrm{A}) / l(\mathrm{H}),$

(8.8) $\quad sin(\alpha) = l(\mathrm{G}) / l(\mathrm{H}).$

Die Bedeutung des Zeichens "Hypotenuse H (eines rechtwinkligen Dreiecks)" liegt eindeutig fest; die Zeichen "Ankathete A" und "Gegenkathete G" bringen dagegen eine Relation zum Ausdruck, nämlich den Bezug der Kathete zu einem der beiden Winkel, die nicht 90° groß sind: Die Ankathete liegt auf einem Schenkel des Bezugswinkels; die Gegenkathete liegt diesem Winkel gegenüber.

Während ein Mathematiker (zum Beispiel) sagen würde, daß eine Winkelfunktion einem Winkel eine Zahl zuordnet. die (beispielsweise) mit Hilfe eines bestimmten rechtwinkligen Dreiecks berechnet werden kann, betrachte ich hier die **Winkelfunktionen als Längenverhältnisse, also als Größen im Sinne des Größenkalküls**, zum Beispiel als das Verhältnis "Länge der Ankathete des Dreiecks mit dem Winkel α durch Länge der Hypotenuse dieses Dreiecks". Das Zeichen "α" **in der Schriftfigur "*cos*(α)"** fungiert in dieser Arbeit also nicht als Zeichen für eine geometrische beziehungsweise physikalische Größe (Eigenschaft), sondern als **Zeichen für eine Sache** ("rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α). Bei (kursiv zu schreibenden) Größensymbolen ist korrekter Weise die Sachbindung anzugeben, im Falle der Winkelfunktionen also zum Beispiel die Bindung an ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel "α(1)" oder die Bindung an ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel "α(2)". - So wie zum Beispiel die Masse *m* eines Dinges A mit einem Symbol der Art "*m*(A)" (oder "m_{A}"), aber nicht mit einem Symbol der Art "*m*A" symbolisiert wird, symbolisiere ich beispielsweise den Kosinus des Winkel "α(1) = 30°" mit dem Symbol "$cos(\alpha_1$)beziehungsweise "*cos*(30°)". Ich schreibe also das Größensymbol "*cos*" wie jedes Größensymbol kursiv und das als Sachsymbol fungierende Größenzeichen "α," beziehungsweise "30°" als (zwischen Klammern gesetzten) Index an das Größensymbol "*cos*"

Diese Anmerkung soll auf das Desiderat einer semantisch konsequenten Symbolisierung aufmerksam machen. Die Frage der Symbolisierung sollte Ernst genommen und einmal grundsätzlich durchdacht werden, und zwar auch unter Berücksichtigung der Auffassung, daß nicht nur die Kürze, sondern auch die semantische Deutlichkeit der Symbole zu bedenken ist.

Die ungefähren Ausmaße der Winkelfunktionen für die Winkel zwischen 0° und 90° können zeichnerisch gefunden werden, indem man rechtwinklige Dreiecke mit verschieden großen Winkeln α zeichnet, den Zeichnungen die Längen der Dreieckseiten entnimmt und aus diesen Längen die Längenverhältnisse (= Winkelfunktionen) berechnet. - Die so ermittelten Ausmaße der Winkelfunktionen werden umso ungenauer, je weniger der Winkel α von 90° abweicht.

In einigen Sonderfällen lassen sich die genauen Ausmaße der Winkelfunktionen vergleichsweise einfach **berechnen**.

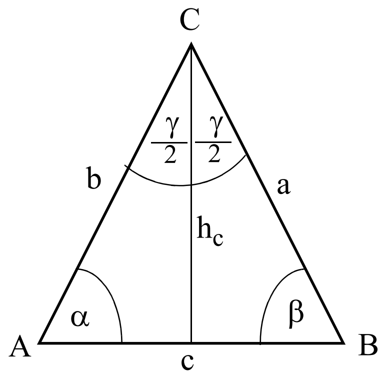


Bild 8.6. Zur Berechnung von sin(30°) und cos(30°)

In einem gleichseitigen und damit auch gleichwinkligen Dreieck (Bild 8.6) sind alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß:

(8.9) $\quad l(\mathrm{a}) = l(\mathrm{b}) = l(\mathrm{c}),$

(8.10) $\quad \alpha = \beta = \gamma = 60°.$

(Die Winkelsumme in einem Dreieck ist 180°.)

Fällt man in einem gleichseitigen Dreieck vom Punkt C aus die Höhe h auf die Seite c, wird das Dreieck in zwei gleich große rechtwinklige Dreiecke geteilt und damit der Winkel γ und ebenso die Seite c halbiert. Damit gilt für den Sinus im rechtwinkligen Teildreieck:

(8.11) $sin(300) = l(\mathrm{c})/2 \,/\, l(\mathrm{a}) = 0{,}5$

(8.12) Die Zahl "0,5" ist kein ungefähres, sondern ein mathematisch genaues Sinusausmaß.

Der Kosinus wird mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes gefunden (Bild 8.6):

(8.12) $\quad [l(\mathrm{h_c})]^2 + [\, l(\mathrm{c}) / 2]^2 = [l(\mathrm{b})]^2 = [l(\mathrm{a})]^2$

(8.13) $\quad [l(\mathrm{h_c})]^2 = [l(\mathrm{c})]^2 - [\, l(\mathrm{c}) / 2]^2 = [l(\mathrm{c})]^2 - 1/4\, [l(\mathrm{c})]^2 = [l(\mathrm{c})]^2 \bullet (1-1/4)$

Damit ist

(8.14) $l(h_c) = l(c) \cdot \sqrt[2]{1 - 1/4}$

Und damit gilt schließlich:

(8.15) $\cos(30°) = l(hc) / l(b) = l(hc) / l(c) = [l(c) \cdot \sqrt[2]{1 - 1/4}\ ] / l(c) = 1 / 2 \cdot \sqrt[2]{3} = 0{,}866...$

Auch das Ausmaß "$1 / 2 \sqrt[2]{3}$" ist mathematisch genau, auch wenn sich $\sqrt[2]{3}$ nicht mathematisch genau als Dezimalzahl darstellen läßt: Sie hat als irrationale Zahl unendlich viele Dezimalstellen und ist nichtperiodisch. Das Symbol "$\sqrt[2]{3}$" ist dagegen eine mathematisch präzise Darstellung dieser Irrationalzahl.

Für Nichtmathematiker sei an dieser Stelle wiederholt: Eine Winkelfunktion ist schlicht das Verhältnis zweier Längen, also eine völlig problemlose Verhältnisgröße und nicht ein dem Nichtfachmann kaum verständlicher Begriff. Der den Laien abschreckende Name "Winkelfunktion" besagt nur, daß das Ausmaß des Längenverhätnisses vom Ausmaß des zugehörigen Winkels abhängt, daß also dieses Verhältnis - in substantivischer Ausdrucksweise - eine Abhängige oder - in der Ausdrucksweise der Mathematik - eine Funktion des Winkels ist. - Was für den Obernamen "Winkelfunktion" gilt, trifft auch für dessen Unternamen zu. Auch die den Laien abschreckenden Namen "Kosinus" und "Sinus" - und ebenso die Namen "Tangens", "Kotangens", "Sekans" und "Kosekans" - bezeichnen unproblematische Längenverhältnisse.

Es bereiten also weder der Begriff der Winkelfunktion noch die Ermittlung der ungefähren Funktionsausmaße (aus den Seitenlängen gezeichneter Dreiecke) irgendwelche Schwierigkeiten. Schwierig ist allein die (hier nicht zu besprechende) Auffindung des mathematischen Gesetzes für eine allen Genauigkeitsansprüchen gerecht werdende Berechnung von Funktionsausmaßen aller Winkel zwischen 0° und 90°. Von den für diese Berechnung erforderlichen unendlichen Reihen wurde die für den Sinus im ersten Teil (unter der Nummer 14.20) in einem anderen Zusammenhang schon verwendet:

(8.16) $$\sin\alpha = \frac{a^1}{1!} - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} + \frac{a^7}{7!} + \ldots - \ldots \quad .$$

("3 !" wird gelesen "drei Fakultät" und bedeutet "1 • 2 • 3"; "5 !" wird gelesen "fünf Fakultät" und bedeutet "1 • 2 • 3 • 4 • 5".)

Die Berechnung solcher unendlicher Reihen bis zu einem hinreichend genauen Ergebnis ist sehr langwierig. Die Funktionsausmaße wurden aber trotzdem schon vor langer Zeit auf hinreichend viele Dezimalstellen genau berechnet und können seitdem Tabellenwerken entnommen werden. - Heute kann man die Winkelfunktionen von elektronischen Rechnern in kürzester Zeit berechnen lassen.

Werden die Gleichungen 8.7 und 8.8 auf unser Beispiel mit den Kräften angewendet, ergibt sich:

(8.17) $cos(\alpha) = F_x / F,$

(8.18) $sin(\alpha) = F_y / F,$ -

beziehungsweise

(8.19) $F_x = F \cdot cos(\alpha),$

(8.20) $F_y = F \cdot sin(\alpha).$

Ist in einem bestimmten Fall $F(1) = 9{,}00$ N und $\alpha(1) = 30{,}0°$, ergibt sich für die Ausmaßkonstituenten der Kraftkomponenten:

(8.21) $\quad F_x(1) \approx 8{,}00 \text{ N} \bullet 0{,}866 \approx 6{,}93 \text{ N}$,

(8.22) $\quad F_y(1) = 8{,}00 \text{ N} \bullet 0{,}500 = 4{,}00 \text{ N}$.

Der Index im Zeichen der Kraftkomponente gibt an, ob diese parallel zur x-Achse oder parallel zur y-Achse liegt, ob also der Winkel, unter dem die Komponente die x-Achse schneidet, 0° oder 90° ist. Dem einheitengebunden angegebenen Ausmaß (zum Beispiel "6,93 N") ist kein Lagebezug zu entnehmen.

Es ist zu beachten, daß in den Gleichungen 8.17 bis 8.22 keine Vektoren und keine Axoren, so dern Sagittare (also Skalare) stehen.

Sind die Komponenten $\overset{\llcorner}{F}_x(1)$ und $\overset{\llcorner}{F}_x(2)$ sowie $\overset{\llcorner}{F}_y(1)$ und $\overset{\llcorner}{F}_y(2)$ - zweier Kraftvektoren $\overset{\llcorner}{F}(1)$ und $\overset{\llcorner}{F}(2)$ zu addieren (Bild 8.9 zu Beginn des Unterabschnitts 8.4), braucht deren Lage im Koordinatensystem nicht durch eine besondere Winkelangabe beschrieben zu werden: Sie ist gleich wie die der zugehörigen Achsen. Wohl aber muß die Orientierung ihres Gleitsinns bezüglich des Gleitsinns der zugehörigen Achsen erfaßt werden, weil die Vektoren $\overset{\llcorner}{F}$ nicht im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegen müssen (Bild 8.7).

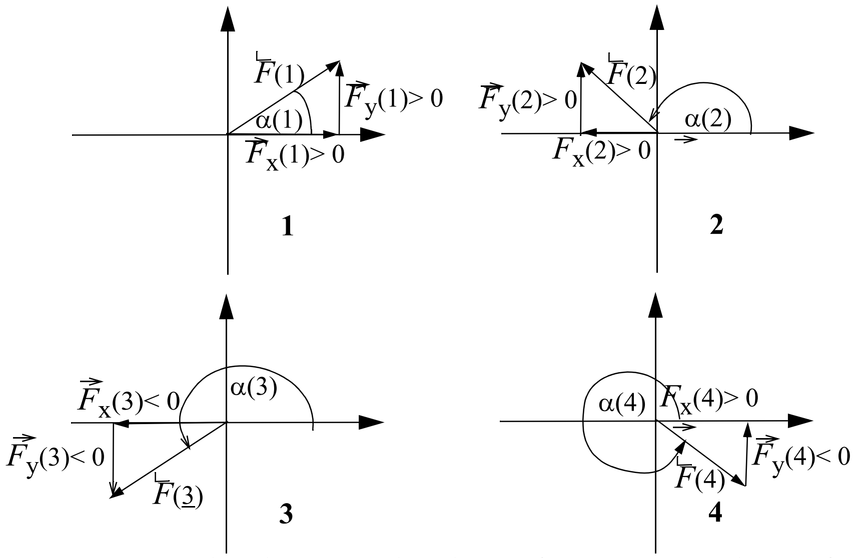


Bild 8.7. Zur Orientierung und zu den Vorzeichen der Kraftaxoren - Da in den Größenkalkül keine Vektoren eingehen, sind die im Bild als Vektorkomponenten darstellbaren, im Kalkül aber nicht als Vektoren behandelbaren Kraftkomponenten $\overset{\llcorner}{F}_x$ und $\overset{\llcorner}{F}_y$ bereits als (im Größenkalkül behandelbare) Axoren $\vec{F}_x$ und $\vec{F}_y$ beschriftet. Außerdem ist angegeben, ob der jeweilige Kraftaxor positiv (> 0) oder negativ (< 0) orientiert ist.

Nur im ersten Quadranten sind beide Kraftaxoren bezüglich der Koordinatenachsen positiv orientiert; im zweiten Quadranten ist der zur x-Achse parallele Axor negativ, der zur y-Achse parallele positiv orientiert; im dritten Quadranten sind beide Axoren negativ orientiert, und im vierten Quadranten ist der x-Achsen-parallele Axor positiv und der y-Achsen-parallele negativ orientiert. Sind die Orientierungen beim Rechnen zu berücksichtigen, wird deshalb bei der Bestimmung von Ausmaß und Richtung des resultierenden Kraftvektors nicht mit den Kräften als solchen gerechnet (und - wie schon gesagt - auch nicht mit den Kraftvektoren), sondern mit den Kraftaxoren.

8.3. Da die Kraftvektoren nicht immer im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegen (Bild 8.7), ist noch die Frage zu beantworten, was unter dem Kosinus beziehungsweise Sinus eines Winkels zu verstehen ist, der größer als 90° ist. Im Bild 8.7 ist ja vorausgesetzt, daß der Anstiegswinkel bis 360° groß sein kann. - Man hilft sich damit, daß man bei den Winkeln aller Teilbilder dieses Bildes das Verhältnis "F_x / F" als den Kosinus des Winkels α definiert und das Verhältnis "F_y / F" als den Sinus. (In der Mathematik werden die Winkelfunktionen als Längen- und nicht als Kraftverhältnisse eingeführt.)

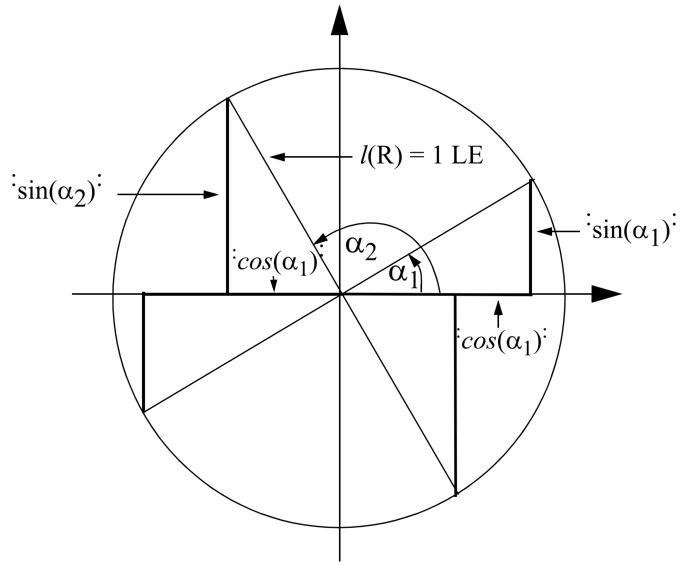


Bild 8.8. Zur Definition der Winkelfunktionen mit Hilfe des Einheitskreises - 1 Längeneinheit (1 LE) = l(R).

Das geschieht mit Hilfe des sogenannten Einheitskreises (Bild 8.8). Dieser ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammenfällt und dessen Radius in der jeweiligen Zeichnung genau 1 Längeneinheit (1 LE) repräsentiert. (Daher der Name "Einheitskreis".) Alle Winkelzweibeine werden so in den Einheitskreis gezeichnet, daß ihre Scheitel mit dem Mittelpunkt dieses Kreises zusammenfallen und daß das jeweils erste der beiden geordneten Beine des Winkelzweibeins auf dem positiv orientierten Abschnitt der x-Achse lieg,t und daß die Beine bis zur Linie des Einheitskreises reichen.

Der **Sinus** wird mit Hilfe dieses Kreises für alle Winkel zwischen 0° und 360° definiert als das Verhältnis "Länge des Lotes vom Endpunkt des zweiten Beins auf die x-Achse durch Länge des zweiten Beins (= Länge des Radius')". Entsprechend ist der **Kosinus** für alle Winkel das Verhältnis "Länge des x-Achsen-Abschnitts bis zum Fußpunkt des vorstehend genannten Lotes durch Länge des zweiten Beins". Da das zweite Bein genau 1 Längeneinheit lang ist, ist die Quotientenbildung sehr einfach. Im Falle der Winkelfunktion "$sin(\alpha) = l(G_1) / l(R)$" ergibt sich für $l(G_1)$ = a LE die Gleichung

(8.23) $\quad sin(\alpha_1) = \text{a LE} / \text{1 LE} = \text{a}.$

Die Zahl "a" ist also nicht nur der Ausmaßfaktor der Länge "$l(G_1)$"; sie ist auch das Ausmaß des Längenverhältnisses "$l(G_1) / l(R)$". In der Mathematik wird deshalb gesagt, daß die (im Einheitskreis liegende) Gegenkathete G_1 unmittelbar den Sinus des Winkels α_1 darstelle. Die Länge der Gegenkathete ist aber selbstverständlich etwas anders als das Längenverhältnis. Ich habe deshalb im Bild 8.8 nicht - wie üblich - "$sin(\alpha)$", sondern (mit Unkorrektheitszeichen) "⁚$sin(\alpha)$⁚" geschrieben.

Es sei daran erinnert, daß auch die Winkel orientierbare Größen sind und daß es deshalb auch positiv und negativ orientierte Winkelaxoren gibt. Da auf Grund der vorstehenden Festlegung, daß der Winkel α zwischen 0° und 360° groß sein kann, alle hier in Rede stehenden Winkel den gleichen (Links-)Drehsinn haben, genügt es, mit den Winkeln als solchen zu rechnen und zum Beispiel zu schreiben "$cos(\alpha_1)$" und "$cos(30°)$" und nicht "$\overrightarrow{cos}\,(\alpha_1)$" beziehungsweise "$\overrightarrow{cos}(+30°)$".

Es gibt aber Fälle, in denen auch rechtsdrehende Winkel betrachtet werden (Bild 8.12 und zugehöriger Text) und bei denen dann mit den (bezüglich des Drehsinns des Koordinatensystems orientierten) Winkelaxoren zu rechnen ist.

Besonders wichtig ist, daß nicht nur die Winkel, sondern - wie vorstehend schon erkennbar war - auch die Winkelfunktionen orientierbar sind und daß im Größenkalkül auch mit Winkelfunktionsaxoren gerechnet wird. - Wie das Bild 8.8 zeigt, gehören zu den Winkeln 30°, 120°, 210° und 300° die folgenden Winkelfunktionsaxoren:

(8.24) $\overrightarrow{cos}(30°) \sim +0{,}866$,

(8.25) $\overrightarrow{cos}(120°) = -0{,}500$,

(8.26) $\overrightarrow{cos}(210°) \sim -0{,}866$,

(8.27) $\overrightarrow{cos}(300°) = +0{,}500$;

(8.28) $\overrightarrow{sin}\,(30°) = +0{,}500$,

(8.29) $\overrightarrow{sin}\,(120°) \sim +0{,}866$,

(8.30) $\overrightarrow{sin}\,(210°) = -0{,}500$,

(8.31) $\overrightarrow{sin}\,(300°) \sim -0{,}866$.

Das Bild 8.8 zeigt - ebenso wie die vorstehend aufgeführten Winkelfunktionsaxoren -, daß man diese nur für den ersten Quadranten zu berechnen braucht. Für Winkel, die größer als 90° sind, und für $\varphi < 90°$ gilt:

(8.32) $sin(90° + \varphi) = +\cos(\varphi)$,

(8.33) $sin(180° + \varphi) = -\sin(\varphi)$,

(8.34) $sin(270° + \varphi) = -\cos(\varphi)$;

(8.35) $cos\,(90° + \varphi) = -\sin(\varphi)$, (8.36) $cos(180° + \varphi) = -\cos(\varphi)$,

(8.37) $cos(270° + \varphi) = +\sin(\varphi)$.

Die Gleichungen 8.24 bis 8.37 zeigen, daß man auch entweder nur die Sinus oder nur die Kosinus für die Winkel zwischen 0° und 90° zu berechnen braucht: Aus den Sinus beziehungsweise Kosinus ergeben sich in leicht einsehbarer Weise die Kosinus beziehungsweise Sinus.

Entsprechende Beziehungen gelten auch für die anderen, hier nicht zu besprechenden Winkelfunktionen.

Nach der Einführung der Winkelfunktionsaxoren ist klar, wie man von den Kraftvektoren $\overset{\llcorner}{F}$ zu den Kraftaxoren $\vec{F}_x$ und $\vec{F}_y$ kommt: Man multipliziert die Kraft F (also nicht den Kraftvektor $\overset{\llcorner}{F}$) mit den Winkelfunktionsaxoren (und nicht mit den Winkeln):

(8.38) $\vec{F}_x = F \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha)$,

(8.39) $\vec{F}_y = F \bullet \overrightarrow{sin}\,(\alpha)$.

Für $F(1) = 8{,}000$ N und $\alpha(1) = 120{,}0°$ (Bild 8.8) ergibt sich:

(8.40) $\vec{F}_x(1) = 8000\ \text{N} \bullet (-0{,}5000) = -4{,}000\ \text{N}$,

(8.41) $\vec{F}_y(1) \sim 8{,}000\ \text{N} \bullet (+0{,}8660) \sim +6{,}928\ \text{N}$.

8.4. Mit diesem Wissen sind wir in der Lage, das Ausmaß und die Richtung des resultierenden Kraftvektors $\overset{\llcorner}{F}(R)$ aus zwei Einzelvektoren $\overset{\llcorner}{F}(1)$ und $\overset{\llcorner}{F}(2)$ nach den Regeln des Größenkalküls zu berechnen (Bild 8.9).

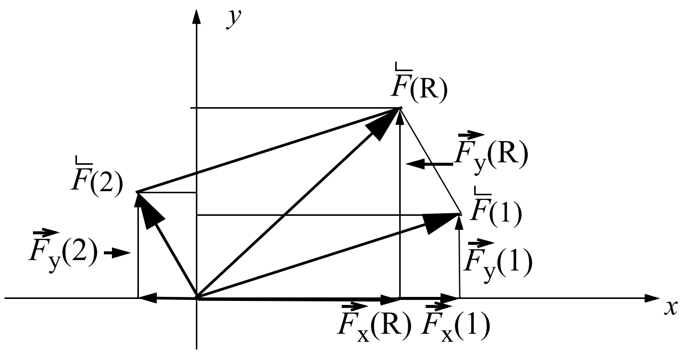


Bild 8.9. Zerlegen zweier Kraftvektoren $\overset{\llcorner}{F}(1)$ und $\overset{\llcorner}{F}(2)$ in achsenparallele Komponenten, die im Kalkül als Axoren behandelt werden, zur Veranschaulichung des paarweisen Addierens dieser Axoren

Zur Berechnung der Koordinaten des Zielpols des Vektors $\overset{\llcorner}{F}(R)$ werden die beiden Vektoren $\overset{\llcorner}{F}(1)$ und $\overset{\llcorner}{F}(2)$ in die achsenparallelen Komponenten $\overset{\llcorner}{F}_x(1)$ und $\overset{\llcorner}{F}_y(1)$ sowie $\overset{\llcorner}{F}_x(2)$ und $\overset{\llcorner}{F}_y(2)$ zerlegt und als im Kalkül behandelbare Axoren $\vec{F}_x(1)$ und $\vec{F}_y(1)$ sowie $\vec{F}_x(2)$ und $\vec{F}_y(2)$ betrachtet; anschließend werden die beiden x-Achsen-parallelen Axoren für sich und die beiden y-Achsen-parallelen Axoren für sich addiert (Bild 8.9):

$$(8.42)\quad \vec{F}_x(R) = \vec{F}_x(1) + \vec{F}_x(2)$$

$$(8.43)\quad \vec{F}_y(R) = \vec{F}_y(1) + \vec{F}_y(2),$$

beziehungsweise - im Verein mit den Gleichungen 8.38 und 8.39:

$$(8.44)\quad \vec{F}_x(R) = \vec{F}(1) \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha_1) + \vec{F}(2) \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha_2),$$

$$(8.45)\quad \vec{F}_y(R) = \vec{F}(1) \bullet \overrightarrow{sin}(\alpha_1) + \vec{F}(2) \bullet \overrightarrow{sin}(\alpha_2),$$

Für $F(1) = 6{,}000$ N, $\alpha_1 = 20{,}00°$, $F(2) = 6{,}000$ N und $\alpha_2 = 120{,}0°$ ergibt sich:

$$(8.46)\quad \vec{F}_x(R) = 6{,}000\ \mathrm{N} \bullet (+0{,}9397) + 4{,}000\ \mathrm{N} \bullet (-0{,}5000) = +5{,}638\ \mathrm{N} - 2{,}000\ \mathrm{N} = +3{,}638\ \mathrm{N},$$

$$(8.47)\quad \vec{F}_y(R) = 6{,}000\ \mathrm{N} \bullet (+0{,}3420) + 4{,}000\ \mathrm{N} \bullet (+0{,}8660) = +2{,}052\ \mathrm{N} + 3{,}464\ \mathrm{N} = +5{,}518\ \mathrm{N}.$$

Die Ausmaßkonstituente F(R) des resultierenden Kraftvektors $\vec{F}$(R) wird rechnerisch mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes gefunden (Bild 8.9):

$$(8.48)\quad F(R) = \sqrt[2]{[F_x(R)]^2 + [F_y(R)]^2} = \sqrt[2]{13{,}235\ \mathrm{N}^2 + 30{,}426\ \mathrm{N}^2} = 6{,}609\ \mathrm{N}\ .$$

Die Richtungskonstituente des resultierenden Kraftvektors wird mit Hilfe eines Winkelfunktionsaxors berechnet, zum Beispiel mit Hilfe des Sinusaxors:

$$(8.49)\quad \overrightarrow{sin}(\alpha_R) = \frac{\vec{F}_y(R)}{F(R)} = \frac{+5.516\mathrm{N}}{6{,}609\mathrm{N}} = +\ 0{,}8346$$

Tabellenwerken oder Rechnern entnimmt man, daß dies der Sinusaxor ist für den Winkel

$$(8.50)\quad \alpha(R) = 56°\ 34{,}5'$$

(und auch für den in unserer Aufgabe nicht in Betracht kommenden Winkel "180° - 56° 34,5"). [Man vergleiche die Ergebnisse 8,48 und 8.50 mit denen der zeichnerischen Ermittlung von F(R) und α(R)]

8.5. Ein weiterer Unterschied zwischen dem Rechnen mit Vektoren und dem mit Kalkülgrößen wird bei der Multiplikation erkennbar. Er besteht darin, daß es bei den Vektorgrößen Multiplikationen und Produkte zweier Arten gibt, während es bei den Kalkülgrößen nur eine Multiplikation einer einzigen Art und nur ein Produkt einer einzigen Art gibt. Die je zwei Arten der Vektormultiplikationen und Vektorprodukte sollen am Beispiel der Kraft-Längen-Produkte "Arbeit" und "Drehmoment" besprochen werden.

Bevor ich das mache, sei noch Folgendes angemerkt. - Vektoren werden in der ('reinen' und insbesondere in der 'angewandten') Mathematik oft nicht durch «Betrag» und Richtung beschrieben, sondern durch ihre achsenparallelen Komponenten; sie werden dann in Form einer Matrize (ohne Axorpfeile) dargestellt:

Vektormultiplikation

$$F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

$$s = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \end{pmatrix}$$

In diesem Fall kann das Produkt "F • s" auch ohne Rückgriff auf Winkelfunktionen berechnet werden:

$F \bullet s = F_x \bullet s_x + F_y \bullet s_y$.

Entsprechend läßt sich auch das Kreuzprodukt zweier Vektoren (Unterabschnitt 8.6) ohne Rückgriff auf Winkelfunktionen berechnen:

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \Longrightarrow a \times b = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

In diesem Fall gehen also von vornherein (achsenparallele) Größenaxoren (und nicht Größenvektoren in der eigentlichen Bedeutung des Wortes) in die Rechnungen ein. - Dieser Fall ist für die hier durchzuführende Betrachtung insofern unwesentlich, als es in dieser nur darauf ankommt, zu zeigen, daß die Vektoren im eigentlichen Sinn des Wortes, also die durch «Betrag» und Richtung gekennzeichneten Größen-Richtungs-Kombinate, nicht in den Größenkalkül eingehen. (Daß man mit Axoren in den Kalkül eingehen kann, ist inzwischen ja bekannt.)

Zur Berechnung der **Arbeit** beziehungsweise der Arbeitsersatzgröße werden im Größenkalkül die schon bekannten Gleichungen verwendet.

(8.51) $W = F \bullet l(S)$ und

(8.52) $W = \int F \bullet dl(S)$

In beiden Gleichungen ist vorausgesetzt, daß Kraft und Weglänge die gleiche Lage (aber nicht notwendig auch die gleiche Richtung) haben, also zum Beispiel beide auf der x-Achse eines Koordinatensystems liegen. Diese Voraussetzung ist aber oft nicht erfüllt, zum Beispiel dann nicht, wenn ein Schiff von einem Kanalufer aus getreidelt und zugleich so gesteuert wird, daß es sich nicht in der Richtung der an ihm angreifenden Kraft bewegt, sondern parallel zum Kanalufer, oder wenn ein auf einem Geleise geschobener Eisenbahnwagen (Bild 8.10) von Bahnarbeitern nicht genau von hinten, sondern von der Seite her geschoben wird und damit die von den Arbeitern ausgeübte Kraft und die von den Geleisen erzwungene Wagenbewegung verschieden gerichtet sind. Bei einer solchen Zwangsführung der Verschiebungsbewegung wirkt ein in einem Koordinatensystem gerichteter Kraftvektor $\vec{F}$ nur mit derjenigen Komponenten $\vec{F}_S$ verschiebend und damit arbeitsverrichtend im Sinne der Physik, die die gleiche Richtung hat wie der Weglängenvektor $\vec{l}$ (S).

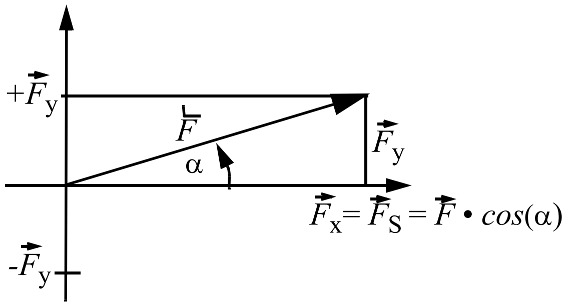


Bild 8.10. Zur Berechnung des arbeitsverrichtenden Kraftaxors $\vec{F}_S$, wenn das Koordinatensystem so gelegt ist, daß der Weg S auf der x-Achse liegt - Ein Schiff wird so gesteuert, daß es sich in Richtung der x-Achse bewegt, obwohl die Richtung des am Schiff angreifenden Kraftvektors $\vec{F}$ um den Winkel α von der Richtung der dem Schiff aufgezwungenen Bewegung abweicht

Wird ein Koordinatensystem - wie in Bild 8.10 so gelegt, - daß der Weg S auf einer x-Achse liegt, ist der arbeitsverrichtende Kraftaxor $\vec{F}_S = \vec{F}_x = F \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha)$. Der auf ihm senkrecht stehende Kraftaxor $\vec{F}_y = F \bullet \overrightarrow{sin}(\alpha)$ drückt lediglich den Wagen gegen die Gleise. Dieser Axor wird vom gleich großen, aber entgegengesetzt orientierten Kraftaxor $-\vec{F}_y$ mit dem die Gleise dem vom Wagen ausgeübten Kraftaxor standhalten, kompensiert, so daß der Axor n nicht verschiebend und damit auch nicht arbeitsverrichtend (im Sinne der Physik) wirkt.

Die Vektoren $\vec{l}$(S) und $\vec{F}_x$ können - wie bekannt - nicht als solche in eine Kalkülgleichung für die Arbeit eingehen; das können - an ihrer Stelle - nur der Weglängenaxor $\vec{l}$(S) und der Kraftaxor $\vec{F}_x$. Das genügt aber auch, da sowohl $\vec{l}$(S) wie auch $\vec{F}_x$ der x-Achse parallel sind und es somit nur auf die Orientierung ihres Gleitsinns hinsichtlich des Gleitsinns der gemeinsamen Bezugsachse ankommt. Damit ist dem in den Kalkül einsetzbaren Arbeitsaxor die Gleichung zuzuordnen:

(8.53) $\quad \vec{W} = F \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha) \bullet l(S)$.

Ist in einem konkreten Fall $F(1) = 10{,}0$ kN, $l(S_1) = 20{,}0$ m und $\alpha(1) = 30{,}0°$ und damit $cos(30{,}0°) = +0{,}866$, ist

(8.54) $\quad \vec{W}(1) = 10{,}0\ \text{kN} \bullet 20{,}0\ \text{m} \bullet (+0{,}866) = +173{,}2\ \text{kNm}$.

Man kann das Koordinatensystem auch so legen, daß (nicht der Weg, sondern) die ‚Kraftwirkungsachse auf der x-Achse liegt (Bild 8.11). In diesem Fall ist

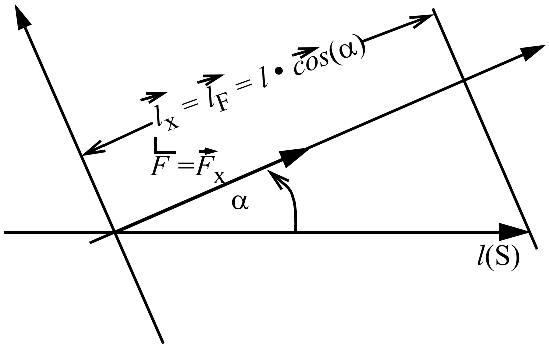


Bild 8.11. Zur Berechnung des Weglängenaxors "$\vec{l}_F = \vec{l}_x$" wenn das Koordinatensystem so gelegt ist, daß die Kraftwirkungsachse auf der x-Achse liegt

(8.55) $\quad \vec{l}_x(S) = l(S) \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha)$

und damit wiederum

(8.56) $\quad \vec{W} = F \bullet l(S) \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha)$.

Mit $F(1) = 10{,}0$ kN, $l(S_1) = 20{,}0$ m und $\alpha(1) = -30{,}0°$ ergibt sich

(8.57) $\quad \vec{W}_1 = 10{,}0 \text{ kN} \bullet 20{,}0 \text{ m} \bullet (+0{,}866) = +173{,}2 \text{ kNm}$,

also nicht nur das gleiche Ausmaß wie bei der vorstehenden Berechnung, sondern (trotz des negativ orientierten Drehsinns des Winkels α) auch die gleiche Axororientierung.

Daß $cos(+\alpha_1) = cos(-\alpha_1)$ ist, zeigt das Bild 8.12. Es ist $cos(+\alpha_1) = l(A_1) / l(H_1)$ und $cos(-\alpha_1) = l(A_1) / l(H_2)$; und es ist $l(H_1) = l(H_2)$.

Die beiden Berechnungsmöglichkeiten (Weglänge mal weglängenparalleler Kraftaxor; Kraftaxor mal kraftparalleler Weglängenaxor) zeigen, daß es überhaupt nicht erforderlich ist, Kraft und Weglänge in ein Koordinatensystem einzubetten.

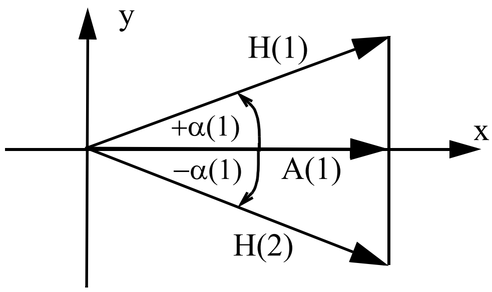


Bild 8.12. $cos(+\alpha_1) = cos(-\alpha_1)$

Es kommt nur auf den Winkel α zwischen der Kraftwirkungsachse und dem Weg an, also auf die Richtung der Kraft (Weglänge) in Bezug auf die Richtung der Weglänge (Kraft), aber nicht auf die Richtung jeder der beiden Größen in Bezug auf ein Koordinatensystem.

Bleibt die arbeitsverrichtende Kraft während der Arbeitsverrichtung nicht konstant, ist an Stelle der Gleichung 8.53 die Gleichung

(8.58) $\quad \overset{\nearrow}{W} = \int F \bullet \overrightarrow{\cos}\,\alpha \bullet dl(S)$

zu verwenden.

Es sei noch daran erinnert, daß der Arbeitsaxor $\overset{\nearrow}{W}$ in den Gleichungen 8.54 und 8.57 positiv orientiert ist, weil der Kraftaxor im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegt. Liegt der Winkel α nicht zwischen 0° und 90° und nicht zwischen 270° und 360°, sondern zwischen 90° und 270°, ist $\overrightarrow{cos}(\alpha)$ bezüglich der x-Achse negativ orientiert und folglich auch $\overset{\nearrow}{F}_x = F \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha)$ und damit auch $\overset{\nearrow}{W} = F \bullet \overrightarrow{cos}(\alpha) \bullet l(S)$. - Im letzten Fall wirkt F_x nicht beschleunigend, sondern bremsend auf den Wagen bis zu dessen Stillstand und dann beschleunigend in der Gegenrichtung.

Für das Verständnis des Unterschiedes zwischen der Vektorrechnung und dem Größenkalkül ist nun derjenige Fall von besonderem Interesse, in dem die Kraftwirkungsachse senkrecht auf dem Weg steht, wenn also α gleich 90° oder 270° und damit $\cos(\alpha)$ gleich null ist und die Kraft überhaupt keine (Verschiebungs-)Arbeit verrichtet:

(8.59) $\quad W = F \bullet 0 \bullet l(S) = 0.$

Im Hinblick auf eine bald zu machende Aussage sei zu dieser Gleichung ein bekannter Satz in Erinnerung gebracht: Wenn ein Faktor eines algebraischen Produkts null ist, ist auch das (ganze) Produkt null; wenn kein Faktor null ist, ist auch das Produkt nicht null.

In der Vektorrechnung werden für den Arbeitsaxor $\overset{\nearrow}{W}$ die Gleichungen

(8.60) $\quad \overset{\nearrow}{W} = \overset{\llcorner}{F} \bullet \overset{\llcorner}{l}(S)$ und

(8.61) $\quad \overset{\nearrow}{W} = \int \overset{\llcorner}{F} \bullet d\overset{\llcorner}{l}(S)$

verwendet. (Tatsächlich wird an Stelle des Symbols "0" für den Arbeitsaxor $\overset{\nearrow}{W}$ das Symbol "W" geschrieben und der Axor als "Skalar" bezeichnet.) In den Gleichungen 8.60 und 8.61 kommt kein Winkel beziehungsweise keine Winkelfunktion vor, weil die Vektorsymbole (schon) Ausmaß-Richtungs-Kombinate symbolisieren (und die Vektorgleichungen eben deshalb einfacher sind als die Axorgleichungen). Die Gleichungen 8.60 und 8.61 gelten für jeden Winkel, unter dem ein Kraftvektor einen Weglängenvektor schneidet; sie gelten also auch für den Fall, daß $\overset{\llcorner}{F}$ und $\overset{\llcorner}{l}(S)$ senkrecht aufeinander stehen und folglich die Kraft keine Arbeit verrichtet, das Produkt "$\overset{\llcorner}{F} \bullet \overset{\llcorner}{l}(S)$" beziehungsweise "$\int \overset{\llcorner}{F} \bullet d\overset{\llcorner}{l}(S)$" also gleich null ist:

(8.62) $\quad F \perp l(S) \Rightarrow \overset{\nearrow}{W} = \overset{\llcorner}{F} \bullet \overset{\llcorner}{l}(S) = 0$.

Das besagt: Ein Vektorprodukt kann - im Gegensatz zu einem algebraischen Produkt - auch dann null sein, wenn keiner seiner Faktoren null ist. Dieser Sachverhalt zwingt dazu, die Vektorprodukte von den Produkten in der ursprünglich gemeinten Bedeutung zu unterscheiden. Das Wort "Produkt" ist in der Sprache der Vektorrechnung vom ursprünglich bezeichneten Begriff zu einem übergeordneten Begriff 'gewandert', der neben dem nun als "algebraisches Produkt" zu bezeichnenden ursprünglichen Begriff auch noch den andersartigen Begriff des Vektorprodukts umfaßt. Dem entsprechend umfaßt auch das Wort "Multiplikation" jetzt außer der algebraischen auch die andersartige vektorielle Multiplikation.

Der Arbeitsaxor $\overset{\nearrow}{W}$ (der - wie schon gesagt - bis jetzt ebenfalls als "Arbeit W" und in semantisch unbefriedigender Weise als ein "Skalar" bezeichnet wird), wird in der Vektorrechnung (im Gegensatz zu einem anderen, im nächsten Unterabschnitt zu besprechenden Vektorprodukt) als "Skalarprodukt zweier Vektoren" bezeichnet. Dieser Name bringt den auffallenden Sachverhalt zum Ausdruck, daß das Produkt zweier Vektoren nicht auch selber ein Vektor, sondern (vermeintlich) ein Skalar (tatsächlich aber ein Axor) ist.

Da es «skalare Vektorprodukte» gibt, die null sind, gibt es - um auch das anzumerken - keine Umkehrung der «skalaren Vektormultiplikation», also keine «skalare Vektordivison». - Bei der «skalaren Vektormultiplikation» gibt es auch kein Assoziationsgesetz; wohl aber gilt ein Distributivgesetz.

8.6. Eine weitere Besonderheit der Vektorrechnung zeigt sich beim Arbeiten mit dem Drehmoment (mit der Drehmomentenersatzgröße). - Wenn die eine Drehung bewirkende Kraft (die nur ein Teil des tatsächlich wirkenden Kräftepaares ist) senkrecht auf den Hebel wirkt, wird im Größenkalkül die folgende Gleichung verwendet:

(8.63) $M = F \bullet l(\mathrm{A})$ (A: Hebelarm).

Ist die einschränkende Bedingung nicht erfüllt und weicht die Kraftrichtung um den Winkel a von der Hebelrichtung ab (Bild 8.13) ist die Gleichung

(8.64) $M = F \bullet sin(\alpha) \bullet l(\mathrm{A})$

zu benutzen, weil nur die Komponente $F_y = F\, sin(\alpha)$ drehend wirkt.

,

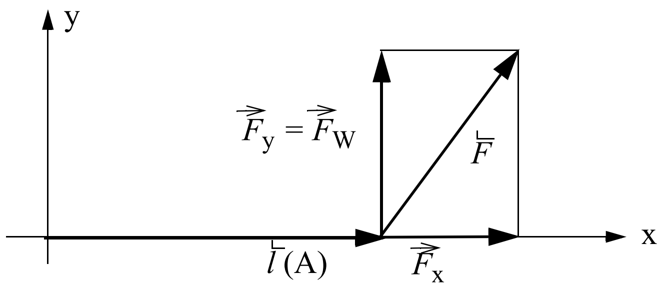


Bild 8.13. Zur Berechnung des drehend wirkenden Kraftaxors $\vec{F}_y$, wenn das Koordinatensystem so gelegt ist, daß der Hebelarm A auf der x-Achse liegt

Die Komponente $F_x = F \bullet cos(\alpha)$ wirkt nicht drehend, sondern zieht nur am Hebelarm in der Längsrichtung des Hebels. Ist 90° < a < 180°, drückt diese Kraftkomponente den Hebel gegen das Hebellager. Die in Längsrichtung des Hebels am Hebellager ziehende beziehungsweise gegen dieses drückende Kraftkomponente wird durch die gleich große, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft kompensiert, mit der das Hebellager auf den Hebel wirkt.

Soll die Orientierung des Drehmomentenaxors mit erfaßt werden, ist die Orientierung des drehwirksamen Kraftaxors

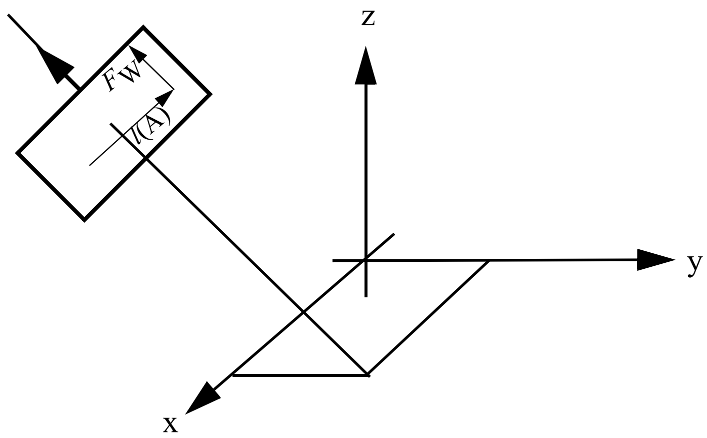
(8.65) $\vec{F}_W = \vec{F}_y = F \bullet \vec{sin}(\alpha)$

zu beachten und die Gleichung

(8.66) $\vec{M} = F \bullet \vec{sin}(\alpha) \bullet l(\mathrm{A})$

zu verwenden. - Der Drehmomentenaxor $\vec{M}(1)$ des Bildes 8.13 ist linksdrehend und bezüglich des ebenfalls linksdrehenden Koordinatensystems positiv orientiert.

Diese Aussage setzt voraus, daß die beim zweidimensionalen Koordinatensystem mit zu denkende (aber nicht zeichenbare) z-Achse den gleichen Gleitsinn hat wie der Sehstrahl des Beobachters. Der Drehsinn des Axors $\vec{M}$ ist ja - wie ebenfalls bekannt - nur eine Konstituente eines mit zu denken Schraubsinns. Das ist sofort ersichtlich, wenn die Ebene, in der der Hebel und die Kraftwirkungsachse liegen, nicht in der x-y-Ebene eines dreidimensionalen Koordinatensystems liegt (Bild 8.14)Bild 8.14.



Das Drehmoment hat im Raum einen Schraubsinn. - Das im Bild dargestellte Drehmoment ist linksschraubend und bezüglich des rechtsschraubenden Koordinatensystems negativ orientiert.

In diesem Fall ist die Stellung der von den Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{l}$ (A) aufgespannten Ebene beziehungsweise die räumliche Richtung der auf dieser Ebene senkrecht stehenden (polaren) Drehachse zu berücksichtigen. Das Drehmoment ist im Raum also nicht nur orientierbar, sondern auch richtbar; und das Drehmomenten-Richtungs-Kombinat ist ein Vektor ($\vec{M}$). Das in Bild 8.14 veranschaulichte Drehmoment ist linksschraubend und bezüglich des rechtsschraubenden Koordinatensystems negativ orientiert. Hätte die Drehachse den entgegengesetzten Gleitsinn, wäre das System "polare Drehebene/Drehachse" rechtsschraubend und im Koordinatensystem positiv orientiert.

An dieser Stelle ist noch an einen ganz anderen Sachverhalt zu erinnern: Wird mit Hilfe eines Hebels Dreharbeit verrichtet, ändert sich während der Drehung des Hebels dessen Richtung. Soll die Kraftwirkungsachse während der Drehung senkrecht auf dem Hebel stehen bleiben, muß auch sie während der Drehung ihre Richtung ändern. Diese Forderung wurde schon vor Jahrtausenden erfüllt, indem man zum Beispiel einen die drehwirkende Kraft ausübenden Esel im Kreise um den Drehpunkt des Hebels herumlaufen ließ (Rundganggöpel, zum Beispiel zum Antrieb eines Schöpfrades). - Da man in den meisten technisch wichtigen Fällen nicht mit einem Göpel arbeiten kann, weil man die Richtung der drehwirksamen Kraft nicht ändern kann, mußte man dafür sorgen, daß sich die Richtung des (wirksamen) Hebels - so paradox das zunächst auch klingen mag - trotz der Drehung des materiellen Hebels beziehungsweise Hebelersatzes nicht zu drehen braucht. Das gelang mit Hilfe des Rades (der Rolle, der Welle) und des Seiles (des Riemens, der Kette). Wird die drehwirksame Kraft von einem Seil auf ein (mit einer drehbaren Achse fest verbundenes) Rad ausgeübt, bleiben der sogenannte Kraftangriffspunkt und der wirksame Hebel sozusagen ortsfest stehen, obwohl sich das Rad und die mit ihm verbundene Achse drehen. Der drehwirksame Hebel ist zu einer nur ideell vorhandenen Sache geworden, die - obwohl ortsfest - in dem sich drehenden Rad - gegen dessen Drehsinn - umläuft. - Diese Einfügung soll auch daran erinnern, daß die Erfindung des Rades nicht nur für die Lösung des Problems, wie man materielle Lasten kraftsparend transportieren kann, von entscheidender Bedeutung war.

In ähnlicher Weise wird auch bei der Drehmomentenübertragung durch Zahnräder die Lage der (ideellen) drehwirksamen Hebel trotz des Sich-Drehens der Zahnräder (fast) konstant gehalten.

Ich kehre zum Umgehen mit Vektoren zurück. - Wird (in der Vektorrechnung) mit Vektoren gearbeitet, entfällt das Rechnen mit Winkeln und Winkelfunktionen. An Stelle der Gleichungen 8.64 beziehungsweise 8.66 kann die Gleichung

(8.67) $\vec{M} = \vec{F} \bullet \vec{l}$

verwendet werden. Diese bestimmt aber nicht eindeutig die Orientierung und ohne diese auch nicht die Richtung des Drehmoments. Es wurde deshalb vereinbart, daß in der Vektorrechnung die Vektoren einer Gleichung

(8.68) $\vec{V}(3) = \vec{V}(1) \bullet \vec{V}(2)$

in der Reihenfolge $\vec{V}(1)$, $\vec{V}(2)$, $\vec{V}(3)$ **geordnet** werden und **in dieser Reihenfolge** ein (von der Blickrichtung unabhängiges) **Rechtsschraubsystem** bilden sollen (Bild 8.15).

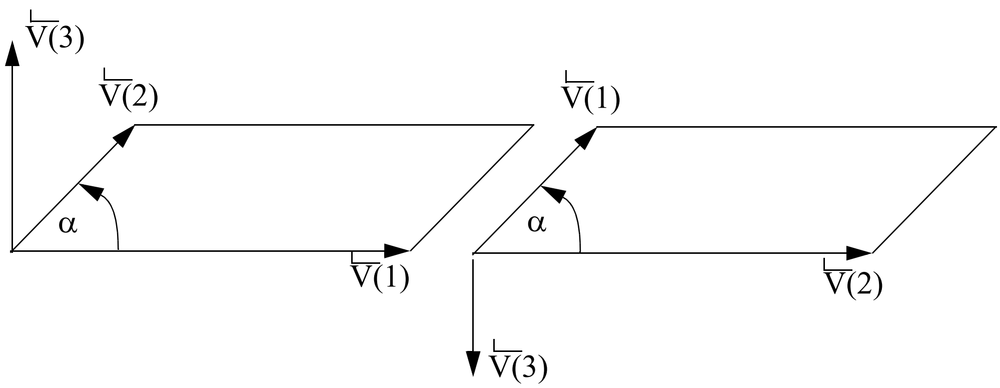


Bild 8.15. Zum vektoriellen Produkt zweier Vektoren $\vec{V}$ (1) und $\vec{V}$ (2) - Näheres im Text

Geometrisch wird das vektorielle Produkt $\vec{V}(3)$ zweier Vektoren $\vec{V}(1)$ und $\vec{V}(2)$ als ein Vektor gedeutet, der senkrecht auf der von $\vec{V}(1)$ und $\vec{V}(2)$ aufgespannten Ebene steht und der so auf diese beiden Vektoren folgt, daß - wie gesagt - alle drei Vektoren zusammen ein Rechtsschraubsystem bilden. Das Areal des von $\vec{V}(1)$ und $\vec{V}(2)$ aufgespannten Parallelogramms wird als ein Maß für das Ausmaß des Vektors $\vec{V}(3)$ interpretiert, also als ein Maß für das Produkt der «Beträge» $|\vec{V}(1)|$ und $|\vec{V}(2)|$; das Ausmaß selbst wird durch die Länge des Pfeils für $\vec{V}(3)$ dargestellt.

Die vorstehende Festlegung der Richtung des Vektors $|\vec{V}(3)|$ hat eine wichtige Konsequenz: Wird in konkreten Fällen die Reihenfolge der Vektorn $\vec{V}(1)$ und $\vec{V}(2)$ in der Gleichung 8.68 vertauscht, ergibt sich eine Richtungsumkehr des Vektors $\vec{V}(3)$:

(8.69) $\vec{F} \bullet \vec{l}(A) = +\vec{M}$

(8.70) $\vec{l}(A) \bullet \vec{F} = -\vec{M}$, (8.71) $\overset{\llcorner}{F} \bullet \overset{\llcorner}{l}(A) = -\overset{\llcorner}{l}(A) \bullet \overset{\llcorner}{F}$

Das heißt aber: Während bei der Multiplikation von Zahlen, Skalaren und Axoren das sogenannte kommutative Gesetz gilt (a • b = b • a; $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$), gilt dieses bei der sogenannten vektoriellen Multiplikation zweier Vektoren nicht; bei dieser gilt das sogenannte alternierende Gesetz: $\overset{\llcorner}{a} \bullet \overset{\llcorner}{b} = -\overset{\llcorner}{b} \bullet \overset{\llcorner}{a}$

Das ist ein weiterer Punkt, in dem sich das Rechnen mit Vektoren von dem mit Zahlen, Skalaren und Axoren, die als "algebraische Größen" zusammengefaßt werden können, unterscheidet. Es gibt also nicht nur (neben der algebraischen und der vektoriellen Addition) eine algebraische und eine vektorielle Multiplikation; es gibt bei der vektoriellen Multiplikation auch noch die 'skalare' (vektorielle) Multiplikation und die 'vektorielle' (vektorielle) Multiplikation. - Um die Multiplikation dieser beiden (semantisch unbefriedigend bezeichneten) Arten im Formelbild zu unterscheiden, werden ihren Produkten verschiedene Namen und Symbole zugeordnet, nämlich den Produkten der ersten Art die Namen "skalares" oder "inneres Vektorprodukt" und die Symbole

(8.72) $\overset{\llcorner}{A}\ \overset{\llcorner}{B}$ (übereinkunftsgemäß gesprochen: "A Be") oder

(8.73) $\overset{\llcorner}{A} \bullet \overset{\llcorner}{B}$ ("A Punkt Be") oder

(8.74) $(\overset{\llcorner}{A} \bullet \overset{\llcorner}{B})$ ("Skalarprodukt A Be")

und den Produkten der zweiten Art die Namen "vektorielles" oder "äußeres" oder "Kreuzprodukt" und die Symbole

(8.75) $\overset{\llcorner}{A} \times \overset{\llcorner}{B}$ ("A Kreuz Be") oder

(8.76) $[\overset{\llcorner}{A}\ \overset{\llcorner}{B}]$ ("Vektorprodukt A Be").

Ich erinnere daran, daß die Einzelvektoren normgemäß /11/ nicht durch ein Zweibein, sondern durch einen Pfeil über dem Größenzeichen symbolisiert werden (oder auch durch kursiv und fett gedruckte Antiquabuchstaben oder durch gerade und nicht fett gedruckte Frakturbuchstaben).

Mit Symbolen der Art 8.72 bis 8.76 können Ersatzgrößen für verschiedenartige Urgrößen wie Arbeit W^+ und Drehmoment M^+ (siehe Teil 1), die im Größenkalkül als identische (Ersatz-) Größen definiert werden ($W = F \bullet l$; $M = F \bullet l$), in der Vektorrechnung unterschiedlich definiert und differenziert dargestellt werden, zum Beispiel durch die Gleichungen

(8.77) $W = \overset{\llcorner}{F} \bullet \overset{\llcorner}{l}$ ("Ef Punkt El")

[der Arbeitsaxor ist das Skalarprodukt ('Punktprodukt') von Kraftvektor und (Weg-)Längenvektor] und

(8.78) $\overset{\llcorner}{M} = \overset{\llcorner}{F} \times \overset{\llcorner}{l}$ ("Ef Kreuz El")

[der Drehmomentenvektor ist das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) von Kraftvektor und (Hebelarm-)Längenvektor].

Das ändert aber nichts daran, daß man beim ('numerischen') Rechnen auch im Falle der vektoriellen Multiplikation von der Vektorrechnung zur Axorrechnung übergehen muß, also zum Beispiel von der Gleichung 8.78 zur Gleichung 8.66, da man nicht mit Vektoren in den Größenkalkül eingehen kann. In diesem sind die beiden, in Einheiten der gleichen Art angegebenen Größen "Arbeits(ersatzgröße)" und "Drehmomenten(ersatzgröße)" nur durch die im 8. Abschnitt des ersten Teils bewußt gemachten pragmatischen Begleitmaßnahmen zu unterscheiden.

Wir können zusammenfassen.

(1) Ein Vektor, zum Beispiel ein Kraftvektor $\vec{F}(1)$, kann nur durch eine aufzählende Angabe seiner Ausmaßkonstituenten [zum Beispiel $F(1) = 6{,}00$ N] und seiner Richtungskonstituenten [zum Beispiel $\alpha(1) = 30{,}0^{\circ}$ beschrieben werden, also durch zwei Angaben, die nicht zu einem einzelnen Zwei- oder Dreifaktorenprodukt zusammengefaßt werden können. (Das ist auch der Grund dafür, daß im Abschnitt 3 die beiden Konstituenten "Ausmaß des Vektors" und "Richtung des Vektors" aufzählend angegeben sind, während in allen anderen Fällen ein einzelnes Zwei- oder Dreifaktorenprodukt notiert ist.)

(2) In den Größenkalkül gehen nicht Vektoren als solche ein, sondern Sagittare [zum Beispiel $F_x(1) = 4{,}00$ N] oder Axoren [$\vec{F}(1) = \pm 4{,}00$ N)]. Die Axoren werden durch eine multiplikative Angabe ihres Ausmaßes und ihres Orientierungsfaktors, also durch ein einzelnes Dreifaktorenprodukt dargestellt.

(3) In der Vektorrechnung sind keine Gleichungen erforderlich, in denen eine Winkelfunktion beziehungsweise ein Winkelfunktionsaxor vorkommt, da in diese Rechnung zum Beispiel weder Weglänge und Winkel noch Kraft und Winkel als gesonderte Ausmaßgrößen eingehen: In sie gehen Ausmaß-Richtungs-Kombinate ein (also eben Vektoren). - Umgekehrt gehen in den Größenkalkül keine Vektoren ein. Die Vektorrechnung ist etwas anderes als der Größenkalkül.

(4) Eine Gleichung der Art "$\vec{F}$ (R) = $\vec{F}$ (1) + $\vec{F}$ (2) " für die vektorielle Addition ist einfacher und eleganter, als es die Größengleichungen sind, die für die (genaue) Berechnung der Zielkoordinaten sowie des «Betrags» und des Anstiegswinkels des resultierenden Vektors erforderlich sind. Sind Aufgaben konkret zu berechnen, muß aber der Größenkalkül eingesetzt werden.

(5) Das Wort "Addition" und das Pluszeichen haben in der Vektorrechnung eine andere Bedeutung als in der Arithmetik und im Größenkalkül, so daß wir die algebraische Addition, mit der auch im Größenkalkül gearbeitet wird, und die vektorielle Addition begrifflich und terminologisch zu unterscheiden haben. Das Wort "Addition" ist vom ursprünglichen Begriff, der jetzt als "algebraische Addition" zu bezeichnen ist, zum übergeordneten Begriff "algebraische und vektorielle Addition" gewandert. - Entsprechendes gilt für den Namen Summe. - Und Entsprechendes gilt auch für die Namen "Multiplikation" und "Produkt".

(6) Es ist zu überlegen, ob Vektoren als "physikalische Größen" bezeichnet werden sollten. Vektoren, die nicht gemäß den Regeln des Größenkalküls behandelt werden können, sind keine Kalkülgrößen, sondern allenfalls - wenn das Wort "Größe" in einer allgemeineren Bedeutung verwendet wird - Vektorgrößen. Wenn man auch die Vektoren als "physikalische Größen" bezeichnen möchte, müßte man die physikalischen Größen in algebraische Größen und Vektorgrößen unterteilen (Teil 3). In das, was wir heute "Größenkalkül" nennen, gingen dann nur die algebraischen Größen, aber nicht alle physikalischen Größen ein.

(7) Namen der Art "Geschwindigkeitsvektor" sollten nicht zu Namen der Art "Geschwindigkeit" verkürzt werden. Wird zum Beispiel nicht zutreffend gesagt, daß der Geschwindigkeits-

vektor ein Ausmaß und eine Richtung hat, sondern - wie es in laxer Ausdrucksweise wohl nicht selten geschieht - "Die Geschwindigkeit hat einen Betrag und eine Richtung", gibt es für die Lernenden Verständnisschwierigkeiten. Die Schüler meinen zu Recht, daß die Bewegung mit einer bestimmten Geschwindigkeit und in einer bestimmten Richtung erfolgt, und können verstehen, daß der der Bewegung (in einem Koordinatensystem) zugeordnete Geschwindigkeitsvektor die Aufgabe hat, sowohl das Ausmaß der Geschwindigkeit wie auch die Richtung der Bewegung zu erfassen. Sie könnten aber nicht verstehen, daß die Geschwindigkeit als solche "einen Betrag und eine Richtung" haben könne.

Zum Schluß dieses Abschnitts merke ich noch an, daß zum Beispiel auch Heinz Griesel in einer größentheoretischen Abhandlung /7/ schreibt: "Entscheidend für die rationale Abhängigkeit und die Ableitung von vektoriellen Größen sind jeweils die zugehörigen Betragsgrößen, also skalare Größen. Die vektoriellen Größen werden dann mit Hilfe der Betragsgrößen unter Hinzuziehung der Richtung konstituiert, also faktisch auf die Betragsgrößen zurückgeführt."