7. Schraub-, Dreh- und Gleitsinne und ihre Orientierung bei geometrischen Gebilden und bei physikalischen Größen

7.1. In einer polaren Ebene kann ein Drehsinn auch einer zweidimensionalen Figur zugesprochen und diese dadurch zu einer polaren Figur gemacht werden. Deren Drehsinn wird festgelegt, indem man in die sogenannte Randlinie oder Randkurve der Figur eine (den Drehsinn anzeigende) Pfeilspitze einzeichnet oder die etwaigen Eckpunkte der Figur in einer geordneten Abfolge kennzeichnet (Bild 7.1)

.

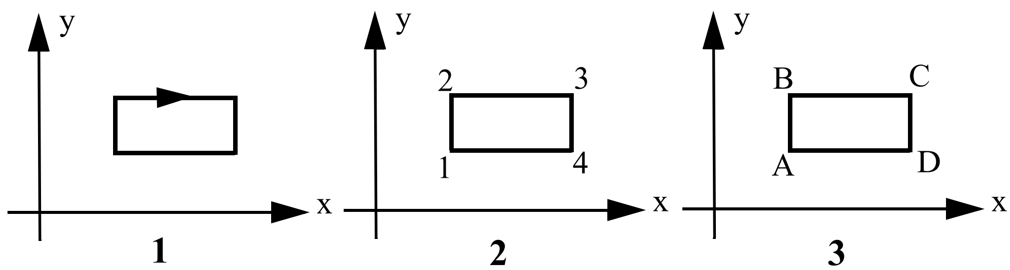

Bild 7.1. Zur Kennzeichnung des Drehsinns polarer ebener Figuren am Beispiel eines Rechtecks - Alle Rechtecke haben den gleichen Drehsinn.

Alle Rechtecke des Bildes 7.1 sind (gemäß den Ausführungen im Unterabschnitt 6.5) rechtsdrehend und bezüglich des Linksdrehsinns der Koordinatensysteme negativ orientiert.

Eine Polarität wird (aber) nicht nur den polaren Figuren zugesprochen; im Größenkalkül werden auch die **Areale** polarer Flächenstücke (aus mathematischen Gründen) als **polare Größen** betrachtet und behandelt. Die Arealaxoren entgegengesetzt orientierter polarer Figuren erhalten im Größenkalkül entgegengesetzte Orientierungsfaktoren. Hätte zum Beispiel das in einer Ebene liegende und hinsichtlich des Bezugsdrehsinns negativ orientierte Rechteck des Bildes 7.1 (R1) den Arealaxor "$\vec{A}\,(R_1)$ = - 3 cm^2", hätte das spiegelbildlich gleiche positiv orientierte Rechteck R_2 den Arealaxor "$\vec{A}\,(R_2)$ = +3 cm^2". - Im Größenkalkül gibt es also nicht nur negative Längen- und Drehmomentenaxoren, sondern negative Axoren aller polaren Größen.

Wird eine ebene Figur nicht nur in ihrer Ebene, sondern im Raum betrachtet, also ihre Stellung im Raum mitbedacht (Bild 7.2), hat das System "polare ebene Figur und (polare) Drehachse" nicht nur einen Dreh-, sondern auch einen Schraubsinn. Das in Bild 7.2 gezeichnete System ist rechtsschraubend und bezüglich des Rechtsschraubsinns des Koordinatensystems positiv orientiert. - Wie dem System kann auch dem sich drehenden Rechteck (bei dem die Drehachse mitzudenken ist) und auch dem Arealaxor dieses Rechtecks ein Schraubsinn zugesprochen werden: Hätte das im Raum befindliche und hinsichtlich des Bezugsschraubsinns positiv orientierte Rechteck R_3 des Bildes 7.2 den Arealaxor "$\vec{A}\,(R_3)$ = +3 cm^2", hätte das entsprechende negativ orientierte Rechteck R_4 den Arealaxor "$\vec{A}\,(R_4)$ = -3 cm^2". - Den Axorengleichungen für $\vec{A}\,(R_1)$ und $\vec{A}\,(R_2)$ einerseits sowie $\vec{A}\,(R_3)$ und $\vec{A}\,(R_4)$ andererseits ist nicht zu entnehmen, daß es sich im ersten Fall um den Drehsinn und im zweiten um den Schraubsinn handelt. Das muß der Kontext besagen.

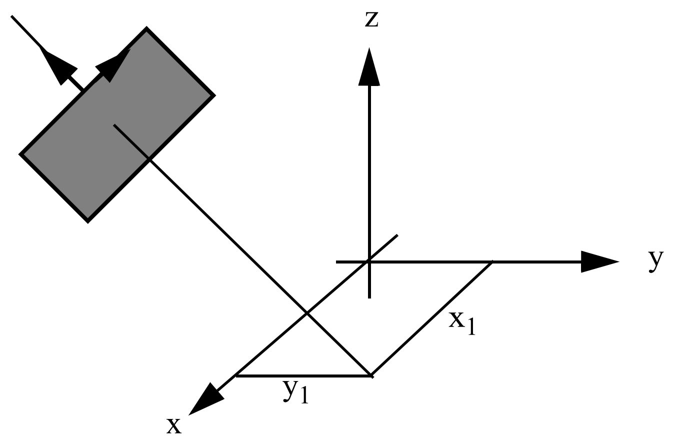

Bild 7.2. Zur Festlegung des Schraubsinns des Systems "polare ebene Figur und (polare) Drehachse"

Auch nichtebenen zweidimensionalen Figuren kann im Raum ein Schraubsinn zugeordnet werden.

Um Mißverständnisse zu vermeiden, ist das Folgende zu betonen. - Der Arealaxor erfaßt auch bei dreidimensionaler Betrachtung außer dem Ausmaß nur die Orientierung des Schraubsinns des Areals bezüglich des Schraubsinns des Koordinatensystems, nicht aber die jeweils besondere Richtung der Schraubachse im Raum. Es handelt sich also beim Arealaxor, der im Raum einen Schraubsinn hat, um einen (orientierten) Axor und nicht um einen (gerichteten) Vektor. Die Orientierung des Schraubsinns des Systems "polares Rechteck und (polare) Drehachse" bezüglich des Schraubsinns des Koordinatensystems ist unabhängig von der räumlichen Richtung der Drehachse dieses Systems. Im Bild 7.2. könnte das aus dem Rechteck und der Drehachse bestehende System auch beliebig anders in das Koordinatensystem gestellt sein (so daß die Drehachse bezüglich des Koordinatensystems unterschiedlich räumlich gerichtet wäre) - die Orientierung seines Schraubsinns wäre immer gleich, in diesem Beispiel also bezüglich des rechtsschraubenden Koordinatensystems immer positiv.

In /13/ werden ebene Figuren und deren Areale ausschließlich in der polaren Ebene (und nicht auch im polaren Raum) betrachtet. Da die Figuren und ihre Areale in ihrer Ebene nur einen Drehsinn haben, kommt nicht in den Blick, daß sie im Raum auch einen - für die Praxis vergleichsweise unwichtigen - Schraubsinn haben (siehe den übernächsten Absatz).

Ebenso wie das Areal im Raum, haben auch alle **abgeleiteten Größen** einen Schraubsinn, in die als ein Faktor das Areal eines Flächenstücks eingeht, das im Raum verschieden gestellt sein kann. So hängt zum Beispiel die wichtige Größe "**magnetische Feldstärke H**" in ihrem Ausmaß auch von der Stellung des Flächenstücks ab, durch das ein elektrischer Leitungsstrom fließt /18. Die magnetische Feldstärke ist deshalb eine polare Größe mit Schraubsinn.

Bei den meisten praktisch wichtigen Aufgaben kann man von drei- zu zweidimensionalen Betrachtungen übergehen, indem man ein zweidimensionales Koordinatensystem so wählt, daß seine Ebene wie im Bild 7.1 mit der Ebene des betrachteten Flächenstücks zusammenfällt; in diesem hat das Flächenstück nur einen Dreh- und nicht auch einen Schraubsinn. Beim Übergehen zur zweidimensionalen Betrachtung ist - wie im Unterabschnitt 6.5 ausgeführt - zu beachten, daß die mit zu denkende, in der x-y-Ebene aber nicht zeichenbare z-Achse definitionsgemäß den gleichen Gleitsinn hat wie der Sehstrahl des Beobachters. Nur bei dieser Festlegung sind die Koordinatensysteme des Bildes 7.1. linksdrehend und die der polaren Rechtecke rechtsdrehend.

7.2. In einem polaren Raum kann ein Schraubsinn auch einem Körper zugesprochen und dieser dadurch zu einem polaren Körper gemacht werden. Der Schraubsinn kann im Falle eines Parallelflächners und damit auch im Falle eines Quaders zum Beispiel dadurch festgelegt werden, daß man drei ebenenfremden, sich in einem Punkt schneidenden Kanten K, einen Gleitsinn zuordnet und die dadurch entstehenden polaren Kanten in einer geordneten Abfolge kennzeichnet (Bild 7.3).

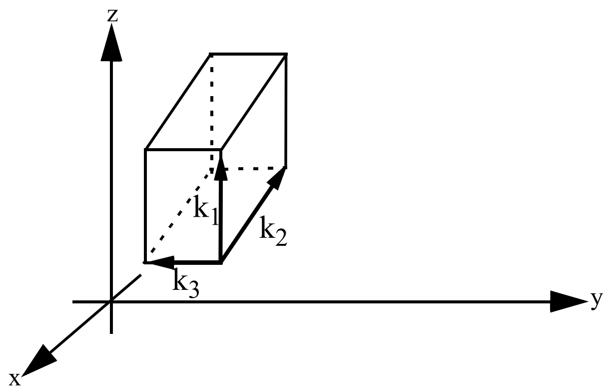

Bild 7.3. Zur Festlegung des Schraubsinns eines Quaders

Es gilt: Ein Quader mit drei gemäß Bild 7.3 geordneten polaren Kanten hat denjenigen Schraubsinn, der sich ergibt aus der Überlagerung des Drehsinns der kleinstmöglichen Drehung, die die Kante K_1 in die Lage der Kante K_2 überführt, und des Gleitsinns der Gleitung, die die K_1-K_2-Ebene in Richtung der Kante K_3 bewegt. Der im Bild 7.3 gezeichnete Quader ist bei dieser Festlegung rechtsschraubend und bezüglich des Rechtsschraubsinns des Koordinatensystems positiv orientiert.

Im Falle einer Pyramide (mit beliebig geformter Querschnittsfläche) und damit auch im Falle eines Tetraeders kann zum Beispiel festgelegt werden: Ein Tetraeder mit vier geordneten Eckpunkten P_i (Bild 7.4) hat denjenigen Schraubsinn, der sich ergibt, wenn man den Drehsinn der durch die geordneten Punkte P_2, P_3 und P_4 bestimmten polaren Ebene und den Gleitsinn des vom Punkt P_1 auf diese Ebene gefällten (polaren) Lots kombiniert. Da die durch die Punkte P_2, P_3 und P_4 bestimmte Drehebene - vom Punkt P_1 aus gesehen - rechts dreht, ist das Tetraeder rechtsschraubend und damit bezüglich des ebenfalls rechtsschraubenden Koordinatensystems positiv orientiert.

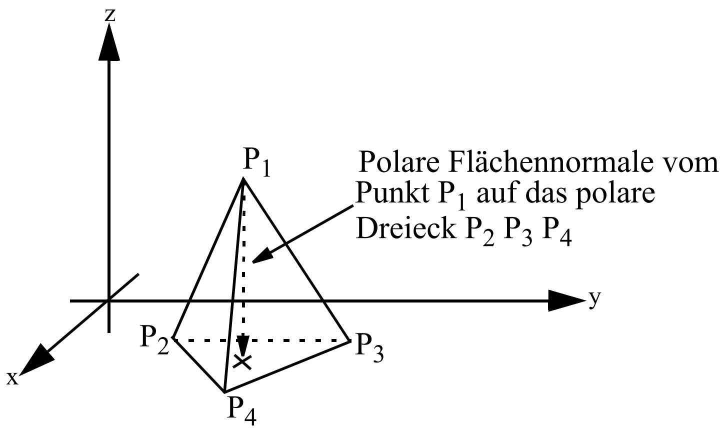

Bild 7.4. Zur Festlegung des Schraubsinns eines Tetraeders

In /13/ werden noch weitere Möglichkeiten für die Festlegung des Schraubsinns polarer Körper besprochen.

Im Größenkalkül wird auch das Volumen polarer Körper als **polare Größe** betrachtet und behandelt, so daß es im Kalkül auch Volumenaxoren gibt. Hätte zum Beispiel die rechtsschraubende Pyramide P_1 des Bildes 7.4 den Volumenaxor " $\vec{V}(P_1) = +3\ cm^3$", hätte die spiegelbildlich gleiche linksdrehende Pyramide P_2 den Volumenaxor "$\vec{V}(P_2) = -3\ cm^3$".

Ebenso wie das polare Volumen einen Schraubsinn hat, haben auch andere Größen einen Schraubsinn, denen drei ebenenfremde, sich in einem Punkt schneidende Vektorpfeile zugeordnet werden können /13/.

Ebenso wie Körper, also allseitig von Flächenstücken begrenzte geometrische "Vollgebilde", können auch "Skelettgebilde", zum Beispiel dreidimensionale Dreibeine, die keine Körper im üblichen Sinn der Geometrie sind, polarisiert sein, und es kann ihnen damit ein Schraubsinn zugeordnet werden. Dazu müssen die einseitig begrenzten und damit schon von sich aus polaren Beine (Schenkel) des Dreibeins lediglich geordnet werden (siehe die Numerierung der dick gezeichneten Kanten des Quaders im Bild 7.3). - Dieser Fall entspricht dem Fall der schon besprochenen dreidimensionalen Koordinatensysteme: Deren positiv und negativ orientierte Achsenabschnitte bilden ja je ein Dreibein.

7.3. Auch in einer polaren **Ebene** kann ein Drehsinn nicht nur einer Figur mit einer in sich geschlossenen Randlinie zugesprochen werden (Unterabschnitt 7.1), sondern auch einem **Zweibein** (Z). Das geschieht dadurch, daß die schon von sich aus polaren Schenkel des Zweibeins (ebenso wie die Achsen eines zweidimensionalen Koordinatensystems) geordnet werden (Bild 7.5) und daß festgelegt wird, daß das Zweibein den Drehsinn der kleinstmöglichen Drehung hat, die den Schenkel 1 in die Lage des Schenkels 2 überführt. - Das Zweibein des Teilbildes 1 ist bei dieser Festlegung linksdrehend und bezüglich des Linksdrehsinns des Koordinatensystems positiv orientiert; das des Teilbildes 2 ist rechtsdrehend und im System negativ orientiert.

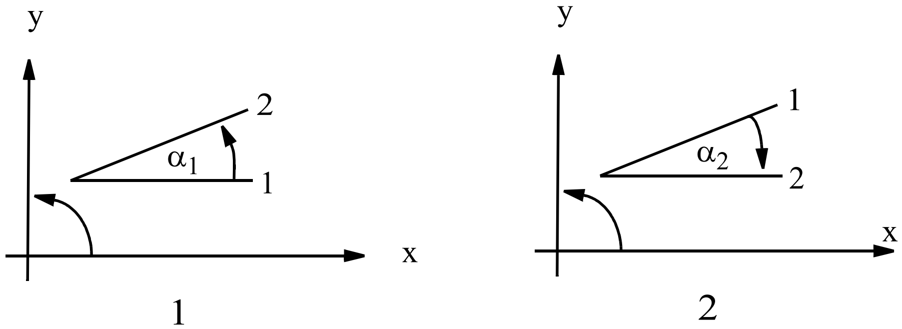

Bild 7.5. Zum Drehsinn von Zweibeinen und deren Winkeln in der Ebene und zur Orientierung der Drehsinne

Eine Polarität wird wiederum nicht nur den polaren "Skelettfiguren" zugesprochen; im Größenkalkül wird auch der **ebene Winkel** eines polaren Zweibeins als polare Größe betrachtet und behandelt: Auch der polare ebene Winkel hat einen Drehsinn, der hinsichtlich eines Bezugsdrehsinns orientiert sein kann. Für die Winkel des Bildes 7.5 können Angaben der Art "$\vec{\alpha}\,(Z_1) = +30°$" und "$\vec{\alpha}\,(Z_2) = -30°$" gemacht werden.

Ebenso wie eine Figur mit in sich geschlossener Randlinie kann auch ein Zweibein im Raum verschieden gestellt sein. Und damit ist auch dem (das Zweibein kennzeichnenden) polaren ebenen Winkel im Raum ein Schraubsinn zuzuordnen (Bild 7.6). Der Winkel des Zweibeins im Teilbild 1 ist rechtsschraubend und bezüglich des Rechtsschraubsinns des Koordinatensystems positiv orientiert. Der Winkel des Zweibeins im Teilbild 2 ist linksschraubend und bezüglich des rechtsschraubenden Systems negativ orientiert.

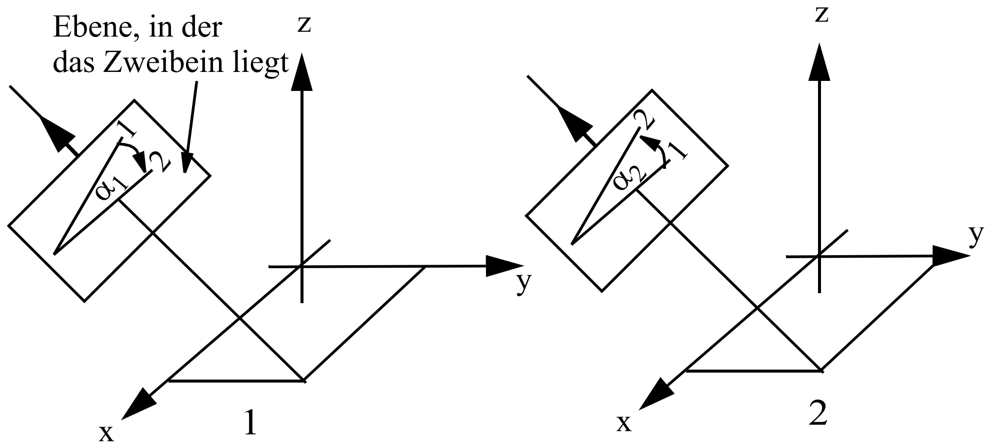

Bild 7.6. Zum Schraubsinn von Zweibeinen und deren ebenen Winkeln im Raum und zur Orientierung der Schraubsinne

Üblicherweise - so auch in /13/ - wird der polare ebene Winkel nur in zweidimensionalen Koordinatensystemen betrachtet. Da er in diesen nur einen Drehsinn hat, kommt der praktisch unwichtige Fall nicht in den Blick, daß dem ebenen Winkel im Raum ein Schraubsinn zugeordnet werden kann.

Bei den meisten praktisch wichtigen Aufgaben kann man von der Stellung der Winkelebene im Raum absehen, indem man die Winkelebene in ein zweidimensionales Koordinatensystem einbettet, dessen x-y-Ebene mit der Winkelebene zusammenfällt und man dann den polaren Winkel nur in einem zweidimensionalen System zu betrachten braucht (Bild 7.5); in diesem hat der Winkel nur einen Drehsinn. - Bei diesem Übergang ist wieder daran zu denken, daß der Drehsinn in der Ebene nur festgelegt werden kann, wenn die Ebene aus dem Raum heraus betrachtet wird.

So wie der ebene Winkel im Raum haben auch alle abgeleiteten Größen, in die dieser Winkel als Faktor eingeht, wie zum Beispiel die Drehgeschwindigkeit und das Drehmoment, im Raum ebenfalls einen Schraubsinn. Auch diese Größen können nur bei abstrakten, zweidimensionalen Betrachtungen so behandelt werden, als hätten sie nur einen Drehsinn.

7.4. So wie eine Pyramide kann auch ein Kegel (mit beliebig geformter Querschnittsfläche) als polarer Körper und der den Kegel kennzeichnende räumliche Winkel als polare Größe betrachtet und kann dem Kegel wie dem Raumwinkel ein Schraubsinn zugeordnet und dieser hinsichtlich eines Bezugsschraubsinns orientiert werden. Der Schraubsinn des Kegels wird bestimmt durch den besonders festzulegenden Drehsinn einer polaren Kegelquerschnittsebene (einschließlich der Ebene der Kegelgrundfläche) und den Gleitsinn der polaren Flächennormalen, die von der Kegelspitze zur Querschnittsebene weist.

Beim Raumwinkel ist eine Einbettung in ein zweidimensionales Koordinatensystem selbstverständlich nicht möglich, so daß dem Raumwinkel nur ein Schraubsinn (nicht aber auch ein Drehsinn) zugesprochen werden kann.

7.5. Alle bis jetzt besprochenen polaren Größen sind Größen, die - wenn sie in ein Koordinatensystem eingebettet werden - in diesem eine Richtung haben. Nun sind noch einige **polare Größen** zu besprechen, **die nicht richtbar sind**, so daß nur die Orientierung ihres Bewegungssinns, und zwar des Gleitsinns, zu erfassen ist. Diese Größen können nur als Axoren (und nicht auch als Vektoren) behandelt werden.

(1) Eine erste solche Größe ist die Arbeit (Verschiebungsenergie)

(7.1) $W = F \bullet l(\mathrm{S})$.

Das Ausmaß der Arbeit, die eine Kraft $F(1)$ an einem Ding A verrichtet, das von einem Ort 1 gegen eine Kraft $F(2)$ (zum Beispiel gegen die Gravitationskraft) zu einem Ort 2 bewegt wird (der zum Beispiel höher [aber nicht unbedingt senkrecht über diesem] liegt), ist (bei einer reibungsfreien Bewegung) unabhängig davon, auf welchem Weg das Ding von 1 nach 2 bewegt wird, also unabhängig davon, ob das Ding mit Hilfe einer schiefen Ebene geradlinig von 1 nach 2 bewegt wird oder ob es zuerst von 1 zum Fußpunkt von 2 bewegt und dann senkrecht nach 2 gehoben wird oder ob es auf irgendeiner krummlinigen Bahn von 1 nach 2 verschoben wird. Der Aufwand an physikalischer Arbeit ist auf jedem Weg gleich groß.

Wenn die (Verschiebungs-)Arbeit nicht auf einer geradlinigen Bahn und nicht mit konstanter Kraft, sondern auf einer krummlinigen Bahn und mit einer sich ändernden Kraft verrichtet wird, wird sie nicht mit dem vorstehend genannten Produkt erfaßt, sondern mit dem Integral

(7.2) $\mathrm{W} = \int \vec{F} \bullet \mathrm{d}\vec{l}\,(\mathrm{S})$,

wird also die Vektornatur sowohl der Kraft wie auch der Länge der Wegdifferentiale berücksichtigt. Die Arbeit ist selber aber keine Vektorgröße, da die Richtungen von Kraft und Weglängen für ihr Ausmaß keine Rolle spielen. Sie ist aber auch kein unpolarer Skalar (kein Spatar), sondern eine Größe mit einem Bewegungssinn (also ein Sagittar).

Wenn das Ding A nicht von 1 nach 2 gehoben wird, sondern sich 'von selbst', 'spontan', 'freiwillig' von 2 nach 1 bewegt, ist es in der Lage, an einem anderen Ding B eine Arbeit zu verrichten und dieses zum Beispiel seinerseits zu heben. (Dazu muß es mit diesem zum Beispiel durch ein Seil verbunden sein, das über eine Rolle geführt ist.) - Die maximale Arbeit, die das Ding A auf seinem Weg von 2 nach 1 verrichten kann, ist gleich groß wie die Arbeit, die am Ding A auf dessen Weg von 1 nach 2 zu verrichten ist, also ebenfalls "$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{l}(S)$". Die Bewegungssinne dieser beiden Arbeiten sind aber entgegengesetzt orientiert. Soll die Orientierung des Bewegungssinns der Arbeit mit erfaßt werden, ist in den Kalkül nicht mit dem Ausmaß der Arbeit allein einzugehen, sondern mit dem Ausmaß-Orientierungs-Kombinat, also mit dem Arbeitsaxor:

(7.3) $\vec{W}_{1,2} = + \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{l}(S)$,

(7.4) $\vec{W}_{2,1} = + \int_2^1 \vec{F} \bullet d\vec{l}(S) = - \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{l}(S)$

(7.5) $\vec{W}_{1,2} = - \vec{W}_{2,1}$

Auf den auffallenden Sachverhalt, daß die Multiplikation zweier Vektoren einen Axor (nach traditioneller Auffassung: einen Skalar) ergeben kann, werde ich im folgenden Abschnitt eingehen.

Im vorstehenden Beispiel wurde vom "Bewegungssinn der Arbeit" gesprochen und angenommen, daß dieser so orientiert ist wie der Bewegungssinn eines von 1 nach 2 oder eines von 2 nach 1 weisenden Pfeils. Für die Praxis wichtiger als eine solche geometrische Betrachtung ist die Frage, ob ein interessierendes Ding oder Dingsystem S an seiner sogenannten Umgebung U Arbeit verrichtet oder ob von der Umgebung Arbeit am System verrichtet wird, ob also zum Beispiel ein System, das aus einem Zylinder mit einem verschiebbaren Kolben und einer im Zylinder eingeschlossenen Gasportion besteht, bei der Expansion der Gasportion Arbeit an der Umgebung verrichtet, oder ob die Umgebung bei der Komprimierung der Gasportion Arbeit am beschriebenen System verrichtet. Bei dieser (nicht geometrischen) Betrachtung sind die Indizes "1" und "2" in den Gleichungen 7.3 bis 7.5 nicht Indizes, die irgendwelche Orte 1 und 2 symbolisieren, sondern Indizes, die dem System beziehungsweise der Umgebung zugeordnet sind ($1 \hat{=} S$; $2 \hat{=} U$). - Übereinkunftsgemäß wird die positive Orientierung demjenigen Arbeitsaxor zugesprochen, der so orientiert ist wie der Arbeitssinn "System --> Umgebung" (Gleichung 7.3). Die Vorzeichenzuordnung erfolgt also gewissermaßen vom Standpunkt des Systems (und nicht von dem des Systembenutzers).

Im Falle der Komprimierungsarbeit wird die Grundgleichung für die "Arbeit" $W = \int F \bullet dl(S)$" durch die (die Physik dieses Sachverhalts unmittelbar beschreibende) Gleichung "$W = \int p \bullet dV$," ersetzt. Zu dieser Gleichung kommt man, indem man die Kraft F gemäß der Definitionsgleichung für den Druck p ersetzt ($p = F/A$; $F = p \bullet A$) und das Differential der Länge des Kolbenweges gemäß der Definitionsgleichung für das Volumen ($V = A \bullet l$; $dl = dV/A$):

(7.6) $W = \int F \bullet dl(S) = W = \int p \bullet A \bullet dV/A = \int p \bullet dV$.

(2) Eine andere wichtige, nur orientier-, aber nicht richtbare Größe ist die **elektrische Spannung** U zwischen zwei Punkten eines Leiters (Abschnitt 1). Für ihren Axor gelten die folgenden, den Gleichungen 7.3 bis 7.5 entsprechenden Gleichungen:

(7.7) $\vec{U}_{1,2} = + \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l}(S)$ (E: elektrische Feldstärke),

(7.8) $\vec{U}_{2,1} = + \int_2^1 \vec{E} \bullet d\vec{l}(S) = - \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l}(S)$,

(7.9) $\vec{U}_{1,2} = - \vec{U}_{2,1}$

(7.8) $\vec{U}_{2,1} = + \int_2^1 \vec{E} \bullet d\vec{l}(S) = - \int_1^2 \vec{E} \bullet d\vec{l}(S)$,

(7.9) $\vec{U}_{1,2} = - \vec{U}_{2,1}$

Als Bezugsgleitsinn der (polaren) elektrischen Spannung ist derjenige Gleitsinn des elektrischen Feldes festgelegt, der von dessen positivem zu dessen negativem Pol weist.

Der Arbeitsaxor *W* und der Spannungsaxor *U* werden als «skalare Größen, die sich als Wegintegrale darstellen lassen», bezeichnet /13/.

(3) An dieser Stelle ist noch die Stärke (Intensität) des Elektrizitätsstroms, also die sogenannte elektrische Stromstärke *I* zu nennen. Auch diese kann nur orientiert, aber nicht gerichtet werden. Soll eine Stromstärke samt der Orientierung ihres Gleitsinns in den Kalkül eingehen, ist mit dem Stromstärkenaxor $\vec{I}$ zu arbeiten. - Der Bezugsgleitsinn der Stromstärke ist vereinbarungsgemäß der Gleitsinn der Bewegung der positiven Ladungsträger.

Die Stromstärke kann im allgemeinen so behandelt werden, als wäre die sogenannte Stromdichte "$S = I/A$" über den gesamten Leiterquerschnitt gleich. Wenn das nicht der Fall ist, wird der Stromstärkenaxor gefunden, indem man die Stromdichte über das polare Areal *A* des Leiterquerschnitts integriert.

(7.10) $\vec{I} = +- \int S \bullet d\vec{A}$

Der Stromstärkenaxor gemäß 7.10 wird auch als «skalare Größe, die sich als Flächenintegral darstellen läßt», bezeichnet /13/.

Den Ausdruck "sogenannte Stromdichte" verwendete ich vorstehend, weil die so bezeichnete Größe eine arealbezogene Größe ist und damit nach gültigen Grundnormen als "Stromstärkenbedeckung" oder "Stromstärkenbelag" zu bezeichnen wäre. Als "Dichten" sind nur volumenbezogene Größen zu bezeichnen (siehe Teil 1).

Zum Schluß dieses Abschnitts ist noch festzuhalten: So wie es nur wenige unpolare Skalare (Spatare) gibt, gibt es auch nur wenige polare Skalare (Sagittare), die nur orientierbar, aber nicht richtbar sind.