5. Längen- und Drehmomentenaxoren

5.1. Zu den orientierten Größen gehört nicht erst der Geschwindigkeitsaxor, sondern schon der Längenaxor. Dieser begegnete uns bereits im Vorstehenden, wurde aber noch nicht als solcher angesprochen. - Wird nicht die Gleitgeschwindigkeit,

(5.1) $v_G = l(G) / t(G)$,

als solche betrachtet, sondern der Gleitgeschwindigkeitsaxor, ist anstelle der Gleichung 5.1, in der die Sagittare "Gleitgeschwindigkeit v_G" und "Gleitweglänge $l(S)$" und der Spatar "Dauer t" miteinander verknüpft sind, eine Gleichung für einen Geschwindigkeitsaxor $\overrightarrow{v_G}$ zu verwenden. In einer solchen Gleichung kann nicht nur auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ein Symbol für einen Axor stehen; es muß auch auf der rechten Seite ein Axorsymbol stehen. Das erfordert, daß an Stelle mindestens eines der beiden Symbole "l(G)" und "t(G)" in Gleichung 5.1 ein Axorsymbol geschrieben wird. Da die Dauer nicht geometrisch orientiert ist (und da im übrigen der Ablaufsinn der Zeit für alle Vorgänge gleich ist), ist nur die Gleitweglänge durch einen Axor zu ersetzen:

(5.2) $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{l}(G) / t(G)$

Nur wenn auch die Orientierung des Längenaxors bedacht wird,

(5.3) $\overrightarrow{l}(G) = (-1) \bullet 3\ \text{m} = -3\ \text{m}$,

ist auch der Quotient aus Längenaxor und Bewegungsdauer eine orientierte Größe:

(5.4) $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{l}(G) / t(G)\ -3\text{m} / 1\text{s} = -3\ \text{m/s}$.

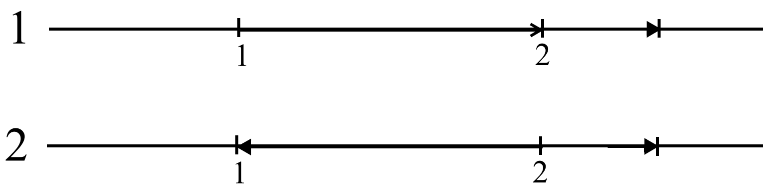

Bild 5.1. Zur Orientierung von Weglängen - Erläuterungen im Text

Der Gleitsinn der orientierbaren Gleitweglänge weist - wie niemand bezweifeln wird - vom früher durchlaufenen Ort zum später durchlaufenen. Werden diese beiden Orte (zum Beispiel) durch ein Ziffernpaar (1,2) gekennzeichnet (Bild 5.1) und wird der Punkt 1 zuerst durchlaufen (Teilbild 1), ist der Längenaxor $\overrightarrow{l}(G)_{1,2}$ hinsichtlich des Bezugsstrahls positiv orientiert; er bekommt deshalb ein positives Vorzeichen:

(5.5) $\overrightarrow{l}(G)_{1,2} = +3\ \text{m}$.

Ist dagegen 2 der zuerst durchlaufene Ort (Teilbild 2), ist der Längenaxor negativ orientiert und mit einem negativen Vorzeichen zu versehen:

(5.6) $\overrightarrow{l}(G)_{21} = -3\ \text{m}$.

Wie schon bekannt, besagt die Gleichung 5.6 nicht, daß die Länge als solche negativ wäre. Das festzuhalten, ist für die Schüler wichtig, weil sich diese (und nicht nur diese) eine negative Länge˙ so wenig vorstellen können wie eine ˙negative Geschwindigkeit˙.

Es ist zu beachten, daß der Pfeil im Axorsymbol und das Ziffernpaar im Index dieses Symbols (Gleichungen 5.5 und 5.6) verschiedene Aufgaben haben und nicht etwa beide nur auf verschiedene Weise die Orientierung des Längenaxors zum Ausdruck brächten. Nur der Pfeil ist Bestandteil des Axorsymbols "$\vec{l}$(G)". Das Ziffernpaar kennzeichnet dagegen den Start- und den Zielpol des Längenaxors auf der Bewegungsbahn, ist also nicht Bestandteil des eigentlichen Axorsymbols; es wird eben deshalb als Index am Symbol des Axors geschrieben. Die beiden Punkte 1 und 2 liegen auf der Bahn fest, gleichgültig, ob die Bewegung von 1 nach 2 oder von 2 nach 1 erfolgt, also gleichgültig, ob der Startpol beim Punkt 1 der Bewegungsbahn liegt (Teilbild 1 des Bildes 5.1) oder beim Punkt 2 (Teilbild 2). Man könnte zwar sagen, daß der Ziffernindex auch allein zum Ausdruck bringe, daß die gekennzeichnete Größe ein Axor ist. Man sollte diesem aber trotzdem nicht nur das Symbol "l(G)" zuordnen, da dieses nicht ein Ausmaß-Orientierungs-Kombinat symbolisiert, sondern lediglich eine (˙reine˙) Ausmaßgröße. Und nur das Kombinat hat einen Startpol, der sowohl mit dem Punkt 1 wie auch mit dem Punkt 2 der Bewegungsbahn zusammenfallen kann, und einen entsprechenden Zielpol.

Aus den Gleichungen 5.5 und 5.6 folgt:

(5.7) $\vec{l}(\mathrm{G})_{1,2} = - \vec{l}(\mathrm{G})_{2,1}$,

(5.8) +3 m/s = - (-3 m/s).

Entsprechende Gleichungen gelten auch für die schon besprochenen Geschwindigkeitsaxoren:

(5.9) $\vec{v}_{\mathrm{G}}\ (1) = \vec{v}_{\mathrm{G}\ 1,2} = +3$ m/s,

(5.10) $\vec{v}_{\mathrm{G}}\ (2) = \vec{v}_{\mathrm{G}\ 2,1} = -3$ m/s;

(5.11) $\vec{v}_{\mathrm{G}\ 1,2} = - \vec{v}_{\mathrm{G}\ 2,1}$.

5.2. Der Längenaxor begegnete uns auch schon im ersten Teil, und zwar bei der Besprechung der Balkenwaage als eines dreiarmigen Hebels (Bild 11.1 des ersten Teils). - Um mathematisch widerspruchsfrei rechnen zu können, ist auch eine Hebelarmlänge als ein Sagittar zu betrachten, also als eine Größe, die auch einen Gleitsinn hat. Gleichgültig ob wir festlegen, daß der Gleitsinn der Hebelarmlängen vom Drehpunkt des Hebels weg und zu den sogenannten Kraftangriffspunkten hinweisen soll (also zu den Punkten, in denen die Wirkungsachsen der Gewichtskräfte von Wägegut und Wägestücken die Hebelarme schneiden), oder ob wir umgekehrt festlegen, daß der Gleitsinn der Hebelarmlängen von den Kraftangriffspunkten zum Drehpunkt hinweisen soll, und auch gleichgültig in welcher geometrischen Lage sich der Hebelarm jeweils befindet: in jedem Fall sind die Gleitsinne der Hebelarmlängen entgegengesetzt orientiert und deren Axoren deshalb mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen. Das ergab sich im ersten Teil schon aus der Betrachtung der Drehmomente. Wenn sich der Waagebalken waagerecht einstellt, ist die Summe der Drehmomente $M1$ und $M2$, die von Wägegut und Wägestücken bewirkt werden, gleich null:

(5.12) $M3 = 0 \Rightarrow M1 + M2 = 0$ (M3: vom Zeiger der Waage bewirktes Drehmoment).

Daraus folgt:

(5.13) $M_1 = - M_2$ beziehungsweise $M_2 = - M_1$

und

(5.14) $F_1 \bullet l(\mathrm{A}_1) = - F_2 \bullet l(\mathrm{A}_2)$ beziehungsweise $F_2 \bullet l(\mathrm{A}_2) = - F_1 \bullet l(\mathrm{A}_1)$.

Die letzten Gleichungen beschreiben formal, was von der Sache her klar ist: Wenn eines der beiden Drehmomente M_1 und M_2 rechtsdrehend ist, ist das andere linksdrehend. Diese Aussage impliziert, daß auch das Drehmoment eine orientierbare (und -- wie schon hier gesagt sei - auch richtbare), also eine polare Größe (ein Sagittar) ist.

Das Wort "polar" bezieht sich im Falle des Drehmoments nicht auf einen orientierbaren Gleitsinn, sondern auf einen orientierbaren Drehsinn, wird hier also in einem Bedeutungsumfang verwendet, der größer ist als der bis jetzt allein in den Blick gekommene. Die Bedeutungserweiterung ist leicht annehmbar zu machen, indem besprochen wird, daß der Drehsinn einer Drehbewegung zum Beispiel durch Einzeichnen einer Kreislinie in die Drehebene und einer (den Drehsinn anzeigenden) Pfeilspitze gekennzeichnet werden kann (Bild 5.2).

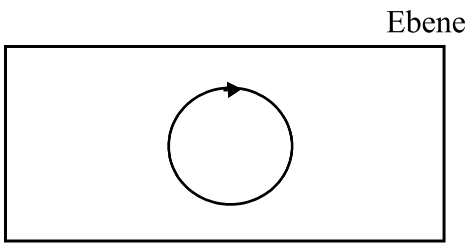

Bild 5.2. Kennzeichnen des Drehsinns einer Ebene durch Einzeichnen einer Kreislinie und einer (den Drehsinn anzeigenden) Pfeilspitze

Ebenso wie der Gleitbahn eines auf einer Kreislinie umlaufenden Punktes (der Ebene) durch das Einzeichnen einer Pfeilspitze (in unserem Denken) eine dem Gleitsinn zugeordnete Kryptostruktur auf- oder eingeprägt wird, wird durch das Einzeichnen des gepfeilten Kreises in die Drehebene auch dieser (in unserem Denken) eine dem Drehsinn zugeordnete Kryptostruktur auf- oder eingeprägt. - Einer Drehung braucht ein Drehsinn so wenig zugesprochen zu werden wie einer Gleitung ein Gleitsinn. Die Drehung hat von sich aus immer einen bestimmten Drehsinn.

Soll die Orientierung des Drehsinns eines Drehmoments im Größenkalkül mit erfaßt werden, ist in diesem nicht mit dem Drehmoment als solchem, sondern mit dem Drehmomentenaxor zu arbeiten. - Da auch Kräfte orientierbar (und ebenfalls auch richtbar) sind, haben wir - wenn wir die Orientierung der Bewegungssinne berücksichtigen - an Stelle der Gleichungen 5.13 und 5.14 Axorengleichungen zu schreiben:

(5.15) $\vec{M}_1 = - \vec{M}_2$ beziehungsweise $\vec{M}_2 = - \vec{M}_1$,

(5.16) $\vec{F}_1 \bullet \vec{l}(\mathrm{A}_1) = - \vec{F}_2 \bullet \vec{l}(\mathrm{A}_2)$ beziehungsweise $\vec{F}_2 \bullet \vec{l}(\mathrm{A}_2) = - \vec{F}_1 \bullet \vec{l}(\mathrm{A}_1)$

Da beide Kräfte zum Erdmittelpunkt hin gerichtet und damit gleich orientiert sind, sind dann, wenn sie auch das gleiche Ausmaß haben,

(5.17) $F_1 = F_2$,

auch die beiden Kraftaxoren gleich:

(5.18) $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$.

Mit 5.18 folgen aus 5.16 die Gleichungen

(5.19) $l(A_1) = - l(A_2)$ beziehungsweise $l(A_2) = - l(A_1)$

und mit diesen auch die Bestätigung der Einsicht, daß die Gleitsinne der beiden Längenaxoren entgegensetzt orientiert sind.

Wenn die Hebelarmlängen und die Gewichtskräfte in die Ebene eines üblichen x-y-Achsensystems eingebettet gedacht werden, liegt es nahe, dem Längenaxor $\vec{l}(A_1)$ im Bild 11.1 des ersten Teils, dessen Gleitsinn (in der Null-Lage des Waagebalkens) gleich orientiert ist wie der Gleitsinn der x-Achse, das positive Vorzeichen zuzuordnen und dem Längenaxor $\vec{l}(A_2)$ das negative. [Die Axoren der wirksamen Hebelarmlängen $\vec{l}(A_1)_w$, und $\vec{l}(A_2)_w$ haben - da sie definitionsgemäß immer senkrecht auf den vertikal nach unten weisenden Kraftvektoren stehen - immer die gleiche Lage wie die x-Achse.] Demnach würde zum Beispiel gelten:

(5.20) $\vec{l}(A_1) = +30$ cm,

(5.21) $\vec{l}(A_2) = - 30$ cm.

Aus der vorstehenden Zuordnung der Vorzeichen zu den Längenaxoren folgt aber nicht notwendig, daß auch $\vec{M}_1 = \vec{F}_1 \bullet \vec{l}(A_1)$ positiv sein müsse und $\vec{M}_2$ negativ. Da die Drehmomentenaxoren Produkte zweier Axoren sind, ist bei der Festlegung der Orientierung ihres Drehsinns auch die Orientierung des Kraftaxors zu bedenken. Und da der Gleitsinn der Kräfte entgegengesetzt orientiert ist wie der der y-Achse, haben beide Kraftaxoren ein negatives Vorzeichen, zum Beispiel

(5.22) $\vec{F}_1 = - 5$ N,

(5.23) $\vec{F}_2 = - 5$ N .

Aus den letzten vier Gleichungen folgt:

(5.24) $\vec{M}_1 = \vec{F}_1 \bullet \vec{l}(A_1) = - 5\text{ N} \bullet (+30\text{ cm}) = - 1{,}5\text{ Nm}$,

(5.25) $\vec{M}_2 = \vec{F}_2 \bullet \vec{l}(A_2) = - 5\text{ N} \bullet (-30\text{ cm}) = + 1{,}5\text{ Nm}$,

Es ist also dem Axor $\vec{M}_1$ - bei den angeführten Bedingungen - tatsächlich nicht das positive, sondern das negative Vorzeichen zuzuordnen und dem Axor $\vec{M}_2$ das positive.

Dieses Ergebnis wirft die grundsätzlich wichtige Frage auf, wie Bezugsdrehsinne und Bezugsgleitsinne festzulegen sind. - Die Frage einer einheitlichen Vorzeichenzuordnung mag im Falle der Drehmomente an einer Balkenwaage unwichtig erscheinen. Wie wir sehen werden, ist sie in anderen Fällen aber unbestreitbar wichtig und deshalb eingehend zu besprechen.

5.3. Es ist noch anzumerken, daß nicht nur Vorgänge einen ihnen untrennbar zukommenden Ablaufsinn haben, und daß nicht nur den entsprechenden Vorgangsgrößen ein Ablaufsinn zugeordnet werden kann; auch die Zeit hat einen Ablaufsinn. Während aber die Ablaufsinne der Vorgänge und Vorgangsgrößen hinsichtlich eines Bezugsablaufsinns verschieden orientiert sein können, ist der Ablaufsinn der Zeit für alle Vorgänge gleich und deshalb nicht orientierbar. -Wie die Zeit, auf die ich erst im Abschnitt 12 näher eingehen kann, hat auch die Größe "Dauer", auf die ich ebenfalls erst im Abschnitt 12 näher eingehen werde, eine polare Kryptostruktur. Diese weist vom früheren Zeitpunkt zum späteren. Die Dauer ist aber - da ihr Ablaufsinn ebenfalls für alle Vorgänge gleich ist - trotzdem nicht orientierbar (und auch nicht richtbar). Das begründet die Sonderstellung der Dauer unter den physikalischen Größen.