4. Axoren als Dreifaktorenprodukte. Addieren von Axoren. Namen und Symbole für Axoren und Vektoren

4.1. Als nächstes ist die mathematische Erfassung der Orientierung von Größen zu besprechen. Ich ziehe hierzu wieder die Gleitbewegung heran, und zwar die nur orientierte, lasse also außer Betracht, daß diese (ebenso wie die ihr parallele Bezugsbewegung) hinsichtlich ihrer Umgebung immer auch gerichtet ist. Da die Orientierung nicht (in gleicher Weise wie ein Ausmaß) verschieden groß sein, sondern nur (alternativ) umschlagen kann, benötigt man zu ihrer Kennzeichnung nur zwei Zeichen. In der Praxis des Größenrechnens ordnet man ihr die Namen "positiv" und "negativ" und die vorstehend schon verwendeten Symbole "+" und "-" ("plus" und "minus") zu:

(4.1) $v_G(1) = + 3$ m/s;

(4.2) $v_G(2) = - 3$ m/s.

Diese Gleichungen wären in Worten (zunächst) etwa zu lesen: Die Gleitgeschwindigkeit der Bewegung 1 ist plus 3 Meter durch Sekunde; die Gleitgeschwindigkeit der Bewegung 2 ist minus 3 Meter durch Sekunde.

Der Konjunktiv zu Beginn des vorstehenden Satzes ist erforderlich; die Gleichungen 4.1 und 4.2 sind interpretations- und verbesserungsbedürftig.

Bevor ich hierauf eingehe, mache ich zwei andere Anmerkungen.

(1) In den vorstehenden Aussagen wird das Wort "Geschwindigkeit" nicht für eine Urgröße, sondern für eine Ersatzgröße verwendet (Teil 1). Ich drücke mich also so aus, als besäßen wir für die Urgröße "Geschwindigkeit" einen eigenen Namen, so wie wir für die Urgrößen "Areal'", "Volumen.", "ebener Winkel und "räumlicher Winkel die Namen "Flächenbedeckung", "Raumerfüllung", "Spreizweite" und "Öffnungsweite" verwenden können. - Diese Anmerkung soll daran erinnern, daß die in der Kalkülsprache für abgeleitete Größen verwendeten Termini Namen für Ersatzgrößen sind. Wer den Namen "Geschwindigkeit" der Urgröße vorbehalten möchte, müßte die im Kalkül verwendete Ersatzgröße ausdrücklich als "Geschwindigkeitsersatzgröße" bezeichnen. (Entsprechendes gilt für alle abgeleiteten Größen.)

(2) Nach den Ausführungen des Deutschen Gesetzes über Einheiten im Meßwesen /4/ und des Normblattes DIN 1301, Teil 1 /9/ wird ein Symbol der Art "1 m/s" gelesen "1 Meter durch Sekunde" und nicht "1 Meter je Sekunde" oder "1 Meter pro Sekunde". Diese (in der Praxis bis jetzt nur selten angewendete) Sprechweise soll bewußt halten, daß es sich um die Einheit einer Quotientengröße handelt. Die üblichen Ausdrücke (zum Beispiel "1 Meter pro Sekunde") sind sprachlich nicht eindeutig der Quotientengröße als ganzer zugeordnet; sie könnten auch nur die Zählergröße im Quotienten meinen, nämlich eine Länge, und zwar die Länge des Weges, der in 1 Sekunde zurückgelegt wird. Im zweiten Fall würde der Ausdruck "pro Sekunde" nicht als Bestandteil des Zeichens für eine einheitengebundenen angegebene Größe fungieren [$v_G(1) =$ 3m/s], sondern gewissermaßen als Index am Zeichen für eine sachgebunden angegebene Größe [$l(1\text{ s}) = 3$ m].

Die auf den rechten Seiten der Gleichungen 4.1 und 4.2 stehenden Symbole und die zugehörige Rede von "positiven" und "negativen Geschwindigkeiten" sind irreführend und bereiten den Lernenden Verständnisschwierigkeiten. Ein Symbol der Art "-3 m/s" suggeriert den Schülern, daß die angegebene Geschwindigkeit, also die Geschwindigkeit als solche, negativ sei. Eine Geschwindigkeit als Ausmaßgröße kann aber - und zwar auch nach Meinung der (unverbildeten) Schüler - nicht negativ (und damit auch nicht positiv) sein. Die Schüler können sich vorstellen, daß die Geschwindigkeit einer Bewegung kleiner wird, bis sie null ist; sie können sich aber nicht vorstellen, daß die Geschwindigkeit als solche kleiner als null und doch wohl erst damit negativ (< 0) werden könne. - Negativ ist in der Tat auch nicht die Geschwindigkeit als solche, sondern die Orientierung des Gleitsinns hinsichtlich eines Bezugsgleitsinns. Das negative Vorzeichen gehört - ebenso wie das (im allgemeinen nicht geschriebene) positive - zur Orientierung des der Bewegung untrennbar zukommenden Gleitsinns und kennzeichnet nicht die Geschwindigkeit als solche. Deshalb sind zur Beschreibung einer orientierten Bewegung nicht Vorzeichen erforderlich, die der Ausmaßgröße "Geschwindigkeit" zugeordnet zu sein scheinen, sondern Symbole für die Orientierung des Bewegungssinns.

Die Verwendung der mathematischen Vorzeichen zur Kennzeichnung der Orientierung ist nicht selbstverständlich. Um das zu zeigen und um die mathematische Zweckmäßigkeit der Verwendung der Vorzeichen bewußt zu machen, verwende ich - vorübergehend und nur scheinbar verfremdend - als Symbole für die beiden Orientierungen die Symbole "gls" (gleichsinnig orientiert) und "ggs" (gegensinnig orientiert). Aus Gründen, die bald ersichtlich sein werden, behandle ich diese Symbole in den folgenden Gleichungen wie Symbole für mathematische Faktoren und bezeichne sie als "Orientierungsfaktoren". Außerdem bezeichne ich das Geschwindigkeits-Orientierungs-Kombinat (+3m/s; -3m/s) als "Geschwindigkeitsaxor". Es ist semantisch untragbar, die Eigenschaft "Geschwindigkeit" und das Eigenschafts-Relations-Kombinat "Geschwindigkeitsaxor" (weiterhin) mit ein und demselben Namen zu bezeichnen.

Bei Verwendung der Orientierungsfaktoren "gls" und "ggs" wäre zum Beispiel eine Additionsvorschrift folgendermaßen zu formulieren:

(4.3) gls • 5 m/s + gls • 3 m/s (= gls • 8 m/s).

Diese Vorschrift würde besagen: Addiere die Gleitgeschwindigkeitsaxoren "gls • 5 m/s" und "gls • 3 m/s", die gleich orientiert sind wie ein Bezugsgleitsinn. Das Ergebnis dieser Addition ist - wie eine zeichnerische Addition zeigt - der Axor "gls • 8 m/s", der ebenfalls gleich orientiert ist wie der Bezugsgleitsinn. - Bei einer zeichnerischen Darstellung heißt "addieren" "die zu addierenden Axorpfeile in den geforderten Orientierungen so aneinander setzen, daß der Startpol des zweiten Pfeils unmittelbar am Zielpol des ersten ansetzt (und daß beide Pfeile auf ein und demselben Strahl liegen)". Das Ergebnis der zeichnerischen Addition ist ein Axorpfeil, der vom Startpol des ersten Pfeils bis zum Zielpol des zweiten reicht (Bild 4.1):

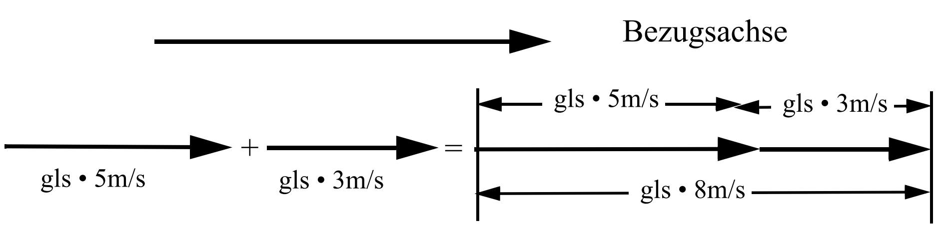

Bild 4.1. Zeichnerische Addition zweier Gleitgeschwindigkeitsaxoren, die gleich orientiert sind. Als Orientierungszeichen fungiert die Buchstabengruppe "gls".

Die Additionsvorschrift

(4.4) gls • 5 m/s + ggs • 8 m/s (= ggs • 3 m/s)

würde bedeuten: Addiere zum Gleitgeschwindigkeitsaxor "gls • 5 m/s" den gegensinnig orientierten Axor "ggs • 8 m/s". Das Ergebnis dieser Addition ist der Axor "ggs • 3 m/s".

Bei der zeichnerischen Addition des gegensinnig orientierten Axors ist ebenfalls der Startpol des zweiten Axorpfeils unter Beachtung der Orientierung am Zielpol des ersten anzusetzen; und das Ergebnis der Addition ist wiederum der Axorpfeil, der vom Startpol des ersten Pfeils bis zum Zielpol des zweiten reicht.

Diese Aussage über die zeichnerische Addition bereitet keine Verständnisschwierigkeiten. Welches ist aber der Algorithmus (also der nach einem bestimmten Schema ablaufende Rechenvorgang), der für die in 4.3 geforderte mathematische Operation automatisch das in Klammern angegebene Ergebnis liefert? Der also nicht nur das Ausmaß "8 m/s", sondern auch den mit "gls" bezeichneten Orientierungsfaktor 'auswirft'? Und der für die in 4.4 geforderte Operation nicht nur das Ausmaß "3 m/s", sondern automatisch auch den mit "ggs" bezeichneten Faktor liefert? Anders gefragt: Können wir für die Orientierungsfaktoren Symbole finden, bei deren Verwendung ein Algorithmus, und zwar nach Möglichkeit der im Größenkalkül sowieso verwendete, sowohl das Ausmaß der Größe wie auch die Orientierung des Gleitsinns der Größe automatisch liefert? - Die Antwort auf diese Frage ist bekannt: Es gibt solche Symbole. Es sind dies die Zeichen "+1" und "-1" (an deren Stelle im allgemeinen nur die Zeichen "+" und "-" geschrieben werden; siehe die Gleichungen 4.1 und 4.2):

(4.5) (+1) • 5 m/s + (-1) • 8 m/s = +5 m/s - 8 m/s = - 3 m/s. Für "-3 m/s" kann deutlicher geschrieben werden "(-1) • 3 m/s".

Bei Verwendung dieser Zeichen geht das Bild 4.1 in das Bild 4.2 über.

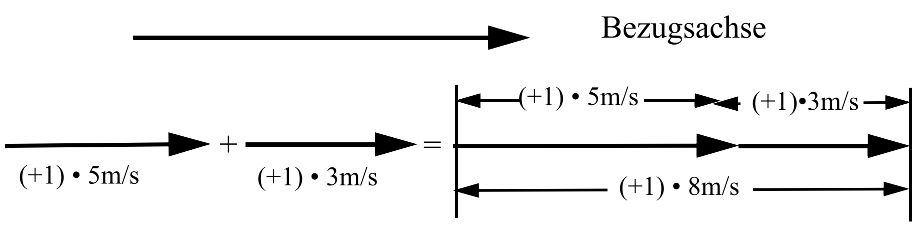

Bild 4.2. Zeichnerische Addition zweier positiv orientierter Geschwindigkeitsaxoren. Als Zeichen für den Orientierungsfaktor fungiert das Symbol "+1":

Auch bei der Subtraktion (zum Beispiel) eines negativ orientierten Axors von einem anderen negativ orientierten Axor (Bild 4.3), liefert die Verwendung des Orientierungsfaktors "-1" automatisch die zutreffende Orientierung (Bild 4.4):

(4.6) ggs • 8 m/s - ggs • 3 m/s (= ggs • 5 m/s),

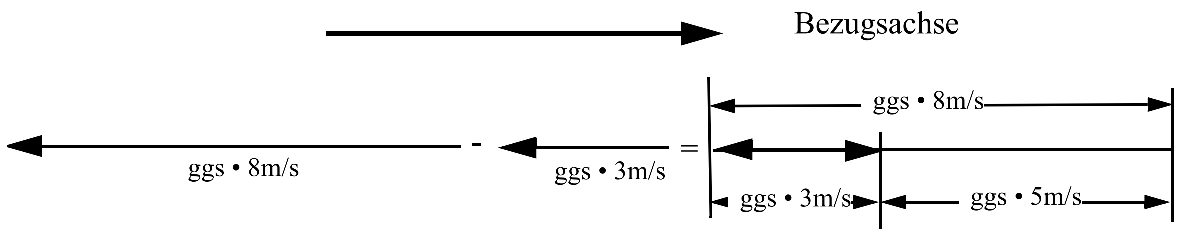

Bild 4.3. Zeichnerische Subtraktion eines negativ orientierten Geschwindigkeitsaxors von einem ebenfalls negativ orientierten. Als Zeichen für den Orientierungsfaktor fungiert das Symbol "ggs".

(4.7) (-1) • 8 m/s - (-1) • 3 m/s = - 8 m/s + 3 m/s = - 5 m/s.

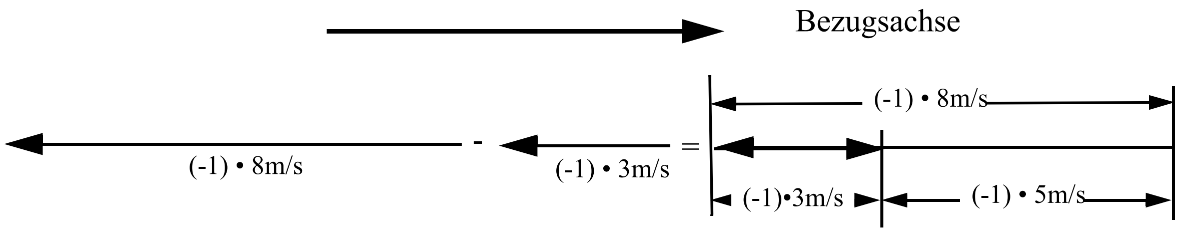

Bild 4.4. Subtraktion eines negativ orientierten Geschwindigkeitsaxors von einem zweiten ebenfalls negativ orientierten. Als Zeichen für die Orientierungsfaktor fungiert das Symbol "-1".

4.2. Die Gleichungen 4.5 und 4.7 zeigen, daß es sinnvoll ist, die Orientierungszeichen ("gls" und "ggs" beziehungsweise "+1" und "-1") als mathematische Faktoren zu schreiben. Das heißt aber, daß die auf den rechten Seiten der (als "interpretationsbedürftig" bezeichneten) Gleichungen 4.1 und 4.2 stehenden (vermeintlichen) Zweifaktorenprodukte mit einem positiven beziehungsweise negativen Zahlenwert tatsächlich Dreifaktorenprodukte sind:

(4.8) $v_G(1) = (+1) \cdot 3 \cdot m/s$;

(4.9) $v_G(2) = (-1) \cdot 3 \cdot m/s$.

Diese beiden Gleichungen zeigen deutlicher als 4.1 und 4.2: Die Gleitgeschwindigkeit der Bewegung 1 ist positiv orientiert und 3 m/s groß; die Gleitgeschwindigkeit der Bewegung 2 ist negativ orientiert und 3 m/s groß. Die Gleichung 4.9 läßt insbesondere erkennen, daß nicht die Geschwindigkeit als solche negativ ist, sondern die Orientierung ihres Gleitsinns. Das Orientierungszeichen ist in dieser Gleichung deutlich vom Symbol für die Größe ("3 m/s") abgehoben, während es im Symbol "-3 m/s" geradezu ein Bestandteil des Größenzeichens zu sein scheint.

Erst mit dem Übergang von den Zeichen "gls" und "ggs" zu den Zeichen "+1" und "-1" werden die in 4.5 und 4.7 durchgeführten mathematischen Vereinfachungen möglich:

(4.10) $(+1) \cdot 5$ m/s = (+)5 m/s;

(4.11) $(-1) \cdot 8$ m/s = (-) 8 m/s.

Dieser Übergang ist also sehr zweckmäßig: Die Orientierungsfaktoren "+1" und "-1" liefern im Falle der Addition 4.5 bei Anwenden des üblichen Additionsalgorithmus automatisch das gewünschte Ergebnis "-3 m/s", also sowohl das zutreffende Ausmaß wie auch die zutreffende Orientierung. Und sie liefern auch in allen anderen Fällen das Ausmaß und die Orientierung automatisch richtig.

Bei der mathematischen Vereinfachung (Gleichungen 4.5, 4.7, 4.10, 4.11) geschieht aber so Wesentliches (und durchaus nicht Selbstverständliches), daß es nicht übersehen werden sollte: In der Gleichung(skette) 4.5 werden das Additionszeichen "+" und das Orientierungszeichen "-1" ("-") des zweiten Summanden zu einem Subtraktionszeichen "-" zusammengefaßt und in der (ausgerechneten) Differenz steht an Stelle eines Zeichens für einen negativ orientierten Geschwindigkeitsaxor ["(-1) • 3 m/s" ein Zeichen, das - mathematisch formal - ein Zeichen für eine negative Geschwindigkeit ist ("-3 m/s"). Diese ist aber (ebenso wie die positive Geschwindigkeit:) nur ein mathematisches Konstrukt, das sich lediglich formal aus dem Dreifaktorenprodukt "(-1) • 3 m/s" ergibt.

Was einer besonderen Erklärung bedarf, ist nicht die Darstellung des Geschwindigkeits-Orientierungs-Kombinats als Dreifaktorenprodukt, sondern die Einführung des mathematischen Konstrukts "negative/positive Geschwindigkeit", also des Konstrukts, das aussieht wie eine (˙reine˙) Eigenschaftsgröße, die negative/positive Ausmaße haben könne.

Das didaktische Problem ist weniger die Einführung der Axoren als vielmehr die Aufgabe, den Schülern bewußt zu machen, was ˙negative Größen˙ eigentlich sind. (Was ˙negative Zahlen˙ sein sollen, wird im Abschnitt 11 besprochen werden.) Nur die Aussage, daß die Ausmaß-Orientierungs-Kombinate Dreifaktorenprodukte sind, ist der Sache angemessen und ermöglicht den Schülern, diese wirklich zu verstehen. Nur sie besagt zutreffend, worum es sich handelt und verlangt von den Schülern nicht, daß diese sich selber klar machen sollen, was ihnen im Unterricht bei der alleinigen Darstellung der Eigenschafts-Relations-Kombinate in Form vermeintlicher ˙Zweifaktorenprodukte mit einem negativen/positiven Zahlenwert˙ nicht verständlich gemacht wird. Sollen die Lernenden verstehen, was sich hinter dem Namen "negative Geschwindigkeit" verbirgt, haben sie diesen immer mit "negativ orientierter Geschwindigkeitsaxor" zu übersetzen . Es kommt nicht nur darauf an, daß die Schüler lernen, an bestimmten Stellen ein Minuszeichen zu schreiben; wichtiger ist, daß sie auch verstehen, was das Minuszeichen - und auch das im allgemeinen nicht geschriebene Pluszeichen - an diesen Stellen tatsächlich besagt. Es muß ihnen deshalb auch nach der Einführung der mathematisch möglichen Vereinfachung bewußt bleiben, daß "-3 m/s" ein (wenn auch ˙verkürztes˙) Symbol für ein Dreifaktorenprodukt ist.

Was zur ˙negativen˙ Gleitgeschwindigkeit gesagt wurde, gilt für alle Größen, die üblicherweise als "negative Größen" bezeichnet werden. - Die «negative Masse» der Dirac-Mechanik fällt aus dem Üblichen und bleibt hier außer Betracht: Selbst die wenigen Fachleute, die sich mit ihr befassen (können), können sich nicht darüber einigen, was sie sein soll. - Ich gehe auch nicht auf den Namen "negative thermodynamische Temperatur" ein, der meiner Meinung nach semantisch unsinnig gewählt ist.

Wie der Abschnitt 11 besonders überzeugend erkennen lassen wird, ist für das Verständnis der tatsächlichen Sachverhalte die folgende Einsicht wichtig: **Die Zeichen "+1" und "-1" fungieren - wenn sie als Zeichen für Orientierungsfaktoren verwendet werden - nicht als Zeichen für die (˙positive˙ oder ˙negative˙) Zahl "1" als solche**, sondern eben als Zeichen für Orientierungsfaktoren; ebenso fungieren die ˙verkürzten˙ Zeichen "+" und "-" - wenn sie als Zeichen für Orientierungsfaktoren benutzt werden - nicht als mathematische Vorzeichen. Die Orientierungsfaktoren könnten grundsätzlich ja auch anders symbolisiert werden, zum Beispiel durch die vorstehend benutzten Zeichen "gls" und "ggs", also durch Symbole, die nicht den Eindruck aufkommen lassen würden, daß es so etwas wie ˙negative Größen˙ gebe. ˙Negative Größen˙ sind negativ orientierte Größen, also - zwar unzutreffend, aber drastisch formuliert - negativ orientierte ˙positive Größen˙. ˙Negative Größen˙ sind mathematische Konstrukte, die die rechnerische Behandlung physikalischer Aufgaben vereinfachen, aber nicht wörtlich als ˙negative Größen˙ verstanden werden dürfen. Die Zeichen "+3 m/s" und "- 3 m/s" symbolisieren nicht ˙positive˙ und ˙negative Größen˙, sondern Ersatzaxoren, die an Stelle der tatsächlichen Axoren "gls • 3 m/s" und "ggs • 3 m/s" beziehungsweise "(+1) • 3 m/s" und "(-1) • 3 m/s" in den Größenkalkül eingehen. - Die Ersatzaxoren entsprechen den im ersten Teil besprochenen (als Zweifaktorenprodukte darstellbaren) Ersatzgrößen. Auch diese (zum Beispiel "Areal $A(1)$ = 3m^2") ersetzen im Größenkalkül die Urgrößen ("Flächenbedeckung $A^+(1)$ = 3 plan"). Wird für den Orientierungsfaktor, der ein Begriff völlig eigener Art ist, an Stelle des Symbols "ggs" das vermeintliche Zahlzeichen "-1" verwendet, und wird dieses in einem weiteren, rein mathematischen Schritt durch das vermeintliche Vorzeichen "-" ersetzt, wird der Axor durch einen Ersatzaxor ersetzt, der wie eine "negative Größe" aussieht, aber eben keine ist. Physikalisch gesehen gibt es keine "negativen Ausmaßgrößen".

Um die Sachverhalte verständlich darzustellen, sollten die Orientierungsfaktoren im einführenden Unterricht auch tatsächlich als mathematische Faktoren dem Zweifaktorenprodukt "Ausmaßfaktor mal Bezugsgröße" zugefügt werden. Da ein Axor zusätzlich zu dem durch ein Zweifaktorenprodukt darstellbaren Ausmaß auch noch eine Orientierung hat, ist er - in verständlicher Weise - nur durch ein Dreifaktorenprodukt darstellbar:

(4.12) Axor = Orientierungsfaktor mal Ausmaßfaktor mal Bezugsgröße.

Sollen die Lernenden nicht durch den irreführenden Ausdruck "negative Größe" verunsichert werden, ist die unzutreffende (meines Wissens zwar nicht ausdrücklich formulierte, aber unbewußt doch vorhandene) Auffassung fallen zu lassen, daß alle Größen, also auch die Axoren, als Zweifaktorenprodukte dargestellt würden, und zwar - im Falle der Axoren - als "Zweifaktorenprodukte mit einem positiven oder einem negativen Zahlenwert". Das Zweifaktorenprodukt "Ausmaßfaktor mal Bezugsgröße" bringt - und zwar auch im Dreifaktorenprodukt - eine Ausmaßrelation zum Ausdruck, während der Orientierungsfaktor eine Entweder-oder-Relation symbolisiert. Sollen die Lernenden mit dem Kalkül verständig umgehen können, müssen sie verstehen, daß Produkte der Art "-3 m/s" zwei verschiedenartige Relationen beschreiben; und es sollte vermieden werden, diese Produkte als "Zweifaktorenprodukte mit einem positiven/negativen Zahlenwert" zu bezeichnen.

4.3. Um Unklarheiten zu vermeiden, sei noch einmal darauf hingewiesen, daß Zeichen der Art "gls" und "ggs" die Sachverhalte nicht verfremden, sondern zutreffend beschreiben. Sie gehorchen aber nicht dem üblichen Größenkalkül. - Wenn wir rechnen

(4.13) gls • 5 N • ggs • 3 m = ggs • 15 Nm,

führen wir tatsächlich zwei Rechnungen durch, nämlich die Rechnung (4.14) 5 N • 3 m = 15 Nm

und die Rechnung

(4.15) gls • ggs = ggs [+1 • (-1) = -1; + • - = -]

Von diesen beiden Rechnungen erfolgt nur die erste gemäß den Regeln des Größenkalküls, während die zweite einem eigenen, andersartigen Kalkül gehorcht.

Da die Orientierungen (Orientiertheiten) nur alternativ umschlagen (können), ist der Kalkül für die Orientierungszeichen sehr einfach. Es gibt nur die Operationen

(4.16) gls • gls = gls,

(4.17) gls • ggs (=ggs • gls) = ggs,

(4.18) ggs • ggs = gls.

Da diese Operationen außerhalb des üblichen Kalküls erfolgen, werden die Orientierungen in einem zweiten Schritt so symbolisiert, daß die neuen Symbole in den üblichen Kalkül eingehen können: Man verwendet mathematische Zeichen, die beim üblichen Rechnen ein zutreffendes

Ergebnis liefern, eben die Zeichen "+1" und "-1" (wobei das Zeichen "+1" und die Ziffer "1" im allgemeinen nicht geschrieben beziehungsweise gesprochen werden):

(4.19) $+1 \bullet (+1) = +1 \; (+ \bullet + = +)$

(4.20) $+1 \bullet (-1) = -1 \bullet +1 = -1 \; (+ \bullet - = - \bullet + = -)$

(4.21) $-1 \bullet (-1) = +1 \; (- \bullet - = +)$

Da diese Zeichen in Produkten verwendet werden, deren zweiter Faktor ein Zeichen für einen Sagittar ist, zum Beispiel in der Gleichung

(4.22) $(+1) \bullet 5\text{ N} \bullet (-1) \bullet 3\text{ m} = (-1) \bullet 15\text{ Nm}$,

ist es immer möglich, den Orientierungsfaktor und den Ausmaßfaktor mathematisch zusammenzufassen:

(4.23) $+1 \bullet 5 = (+)\,5; -1 \bullet 3 = -3; 5\text{ N} \bullet (-3\text{ m}) = -15\text{ Nm}$.

Mit dieser Zusammenfassung bildet man (nur mathematisch mögliche) Konstrukte, nämlich die Konstrukte "**positive Größe**" (+5 N) und "**negative Größe**" (-3 m, -15 Nm). Diese Konstrukte werden nicht realontologisch vorgefunden, sondern existieren nur in den von uns konstruierten Ordnungssystemen, also nur in unserem Denken. - Man **ersetzt** also die tatsächlichen Sagittar-Orientierungs-Kombinate durch die mathematischen Konstrukte "relative Größen", die mit ihren (vermeintlichen) Vorzeichen (ebenso wie die nicht orientierten Sagittare) dem üblichen Kalkül unterworfen werden können. Sie fungieren als Ersatzaxoren und werden (ebenfalls) als "Axoren" bezeichnet (so wie auch Ersatzgrößen als "Größen" bezeichnet werden).

4.4. Nach der Klärung, daß den in den Gleichungen 4.1 und 4.2 gemeinten Größen nicht der Name "Geschwindigkeit" zuzuordnen ist, sondern der Name "Geschwindigkeitsaxor", ist bewußt zu machen, daß für diese Größen auch ein **besonderes Symbol** zu verwenden ist. Da ein Axor zwei Konstituenten hat (Ausmaß und Orientierung), sollte für ihn auch ein aus zwei Zeichen kombiniertes Symbol verwendet werden. Als ein solches bietet sich das Kombinat aus dem üblichen Größenzeichen und einem kurzen, waagerecht über diesem liegenden Pfeil an:

(4.24) $\vec{v}_G(1) = (+1) \bullet 3\text{ m/s}$;

(4.25) $\vec{v}_G\,(2) = (-1) \bullet 3\text{ m/s}$.

Der Pfeil soll signalisieren, daß der Gleitsinn der betrachteten Größe bezüglich des Gleitsinns einer einzelnen Bezugsachse orientiert ist.

Die Gleichungen 4.24 und 4.25 sind zu lesen: Der Geschwindigkeitsaxor der Bewegung 1 ist positiv orientiert und 3 m/s groß; der Geschwindigkeitsaxor der Bewegung 2 ist negativ orientiert und 3 m/s groß.

Erst diese Gleichungen sind einwandfrei und ohne Schwierigkeiten zu verstehen.

Ich brauche nicht zu betonen, daß die Axorsymbole auf den linken Seiten der Gleichungen auch dann verwendet werden sollten, wenn die Orientierungsfaktoren und die Ausmaße auf den rechten Seiten der Gleichungen zu einer negativen Größe zusammengezogen werden:

(4.26) $\vec{v}_G\,(1) = +3\text{ m/s}$;

(4.27) $\vec{v}_{\mathrm{G}}\,(2) = -3\ \mathrm{m/s}$.

Ich merke ausdrücklich an, daß die Verwendung des Pfeils im Axorsymbol nicht mit der Norm DIN 1303, Schreibweise von Tensoren (Vektoren) /11/, in Einklang steht. In dieser wird der Pfeil als eine von mehreren Möglichkeiten der Symbolisierung von Vektoren benutzt. In dieser Arbeit soll der Pfeil - wie vorstehend schon gesagt - die (die Parallelitätsbeziehung mit einschließende) Orientierungsbeziehung des Axors bezüglich einer einzelnen Bezugsachse signalisieren, während ein Vektorsymbol erkennen lassen soll, daß der **Vektor in einem Bezugsachsensystem** gerichtet ist. Ich werde deshalb im Folgenden für Vektoren ein Zeichen verwenden, das aus dem üblichen Größensymbol und einem über diesem gezeichneten und ein Koordinatensystem symbolisieren sollendes Zweibein besteht: $\overset{\llcorner}{v_{\mathrm{G}}}$.

Es ist nicht erforderlich, daß der senkrechte Schenkel des Zweibeins ebenso lang gezeichnet wird wie der waagerechte. Es ist auch nicht nötig, an die Zweibeinschenkel Pfeilspitzen zu zeichnen, weil der Scheitel des Zweibeins (also der Schnittpunkt der angedeuteten Koordinatenachsen) die Beine schon zu Halbstrahlen macht: Mit dem Scheitel haben die Beine zwei unterschiedliche Pole und damit auch einen Gleitsinn, und zwar - wie leicht verständlich - den vom Scheitel weg weisenden.

Wegen der Tatsache, daß der Begrenzungspunkt einer Halbgeraden dieser zwei unterscheidbare Pole zuordnet und damit zu einem Halbstrahl macht, wird in der Geometrie neben dem Namen "Halbgerade" nicht auch noch der Name "Halbstrahl" verwendet: Beide Namen meinen ein und dieselbe Sache. Tatsächlich hindert aber nichts, ein und derselben Sache - wenn diese unter verschiedenen Gesichtspunkten betrachtet wird - verschiedene Begriffe und damit auch verschiedene Namen zuzuordnen (siehe Teil 1): Eine Halbgerade ist ein einseitig begrenztes Geradenstück: und ein Halbstrahl ist ein einseitig begrenztes Strahlstück. Das wird dadurch, daß die beiden so bezeichneten Sachen identisch sind, nicht unzutreffend.

Zum Schluß dieses Abschnitts sind noch zwei Anmerkungen zu machen.

(1) Ob die hier verwendeten Formelzeichen für Axoren (mit einem Pfeil) und für Vektoren (mit einem Zweibein) allgemein eingeführt werden können oder nicht, ist eine Frage, die später von zuständigen Gremien zu entscheiden ist. Sie darf in dieser Untersuchung, in der es mir auf die Erarbeitung grundsätzlicher Klarheit ankommt (zu der auch die Findung der semantisch zweckmäßigsten Namen und Symbole gehört), keine (die Analyse behindernde) Rolle spielen.

(2) Da ein Axor (+3 m/s, -3 m/s) im Größenkalkül genau so behandelt werden kann wie eine Ausmaßgröße (3 m/s), wird er ebenfalls als "physikalische Größe" bezeichnet. Hierauf ist im dritten Teil zurückzukommen, wenn gefragt werden wird, was alles als "physikalische Größe" bezeichnet wird beziehungsweise bezeichnet werden sollte.