11. Zahlen-Orientierungs- und Zahlen-Richtungs-Kombinate. Orientierungs- und Drehfaktoren bei negativen, imaginären und komplexen Zahlen

In diesem Abschnitt ziehe ich die sogenannten relativen Zahlen, also die positiven und die negativen, die imaginären und die komplexen Zahlen, in die Betrachtung ein. Die Begriffe und Namen "Axor", "Vektor" und "Orientierungsfaktor" erlauben, nun auch Vorstellungen zu entwickeln, die besser als die traditionellen Auffassungen verstehen lassen, was die sogenannten relativen Zahlen sind.

11.1. Ich beginne mit den negativen Zahlen, deren Einführung sich schon bei der Umkehr der ursprünglichsten Rechenart, der Addition, als erforderlich erweist. Jeder Fachlehrer weiß, welche Verständnisschwierigkeiten diese Zahlen den Lernenden bereiten. Das ist nicht verwunderlich: Die negativen Zahlen irritierten über Jahrhunderte hinweg auch die Mathematiker. - Während die «absoluten», also die ganzen, die gebrochenen, die irrationalen und die transzendenten Zahlen schon im abendländischen Altertum bekannt waren, wurden die negativen Zahlen erst sehr spät in die Mathematik eingeführt. Während die altgriechischen Mathematiker zum Beispiel irrationale Zahlen begrifflich erfaßten und näherungsweise berechnen konnten, setzte sich im Abendland erst Michael Stifel (1486 bis 1567) für das Rechnen mit negativen Zahlen ein. Und die Namen "positive" und "negative Zahl" kamen erst im 19. (!) Jahrhundert in Gebrauch.

Der griechische Mathematiker Diophant stieß schon 250 nach Christi Geburt auf «zu addierende» und «zu subtrahierende» Zahlen /5/, war aber nicht in der Lage, diese begrifflich näher zu erfassen. Das gelang erst den Indern, und zwar offensichtlich bei kaufmännischen Rechnungen: Sie bezeichneten die positiven und die negativen Zahlen mit Namen, die wir mit "Vermögen" und "Schulden" übersetzen können. Sie stellten diese Zahlen auch schon durch orientierte Strekken dar. (Diese werden in der Literatur als "gerichtete Strecken" und als "Vektoren" bezeichnet.) Die negativen Zahlen fanden aber nicht den Weg ins Abendland, weil sie von den Arabern, die sonst das indische Wissen dem Abendland so gut vermittelten, verworfen wurden.

Diese historischen Anmerkungen und ebenso die folgenden über die Einführung der imaginären und der komplexen Zahlen folgen fast wörtlich der Darstellung von H. G. Germer /5/.

Die historisch belegten Schwierigkeiten lassen verstehen, daß das Akzeptieren der negativen Zahlen auch unseren Schülern schwer fällt. Es ist deshalb erforderlich, Vorstellungen zu entwickeln, die den Lernenden besser verständlich machen, was die sogenannten negativen Zahlen sind.

So wie sich die unverbildeten Schüler - aus gutem Grund - nicht vorstellen können, daß eine physikalische Größe wie die Länge oder die Masse negativ sein könne, können sie sich auch nicht vorstellen, daß eine Zahl negativ sein könne. Dagegen verstehen sie ohne besondere Schwierigkeiten,

- daß die Zahlen als polare Sachen aufgefaßt werden können,
- daß man also auch den Zahlen einen Gleitsinn zusprechen kann,
- daß alle Zahlen auf ein und derselben Zahlenachse liegen (und damit die gleiche Lage haben),
- daß alle Zahlen den gleichen Startpol haben (nämlich den Nullpunkt der Zahlenachse),
- daß der Gleitsinn der Zahlen von deren Startpol zu deren Zielpol weist und
- daß die Zahlen beziehungsweise Zahlenpfeile auf der Zahlenachse von deren Nullpunkt aus - ihrem jeweiligen Gleitsinn gemäß - sowohl 'nach rechts' hin wie auch 'nach links' hin

gezeichnet werden können.

Beim letzten Satz ist zu beachten: Es wird (zum Beispiel) die nicht problematische Zahl "3" nach rechts hin oder nach links hin abgetragen und nicht die (hier als problematisch betrachtete) Zahl "+3" beziehungsweise "-3". - Da sich die Zahlenpfeile nicht nur durch ihre Länge, sondern auch durch die Orientierung ihres Gleitsinns unterscheiden, ist dann, wenn die Orientierung zu beachten ist, nicht mit den Zahlen als solchen zu rechnen, sondern mit den Zahlen-Orientierungs-Kombinaten, also mit dem, was wir als "Zahlenaxoren" bezeichnen können:

(11.1) Zahlenaxor = Orientierungsfaktor mal Zahl.

Wir fügen also dem Schritt von der Orientierung von Sachen (zum Beispiel von Gleitbewegungen) zur Orientierung von Größen (zum Beispiel von Gleitgeschwindigkeiten) noch den Schritt von der Orientierung von Größen zur Orientierung von Zahlen (Z) zu:

(11.2) $\overset{\rightrightarrows}{Z}(1) = (+1) \cdot 3,$

(11.3) $\overset{\rightrightarrows}{Z}(2) = (-1) \cdot 3.$

Wir fassen also die sogenannten positiven und negativen Zahlen als positiv beziehungsweise negativ orientierte Zahlenaxoren auf. Die mathematisch mögliche Operation "(-1) 3 = -3" zeigt, daß das Zeichen "-3" nur ein mathematisches - wenn auch sehr zweckmäßiges - Konstrukt zur Symbolisierung eines Zahlen-Orientierungs-Kombinats ist.

Diese Ausführungen implizieren, daß nur die sogenannten absoluten Zahlen als Zahlen betrachtet werden, während die 'negativen' und die 'positiven Zahlen' (nicht als Zahlen besonderer Arten, sondern) als Kombinate von (absoluten) Zahlen und deren Orientierung aufgefaßt und als Zweifaktorenprodukte "Orientierungsfaktor mal Zahl" dargestellt werden (Gleichungen 11.1 bis 11.3). In diesem Produkt meint also das Wort "Zahl" nur die absolute Zahl, also die Zahl, die dem Verständnis keine begriffliche Schwierigkeit bereitet. Was Zahlen-Orientierungs-Kombinate sind, können die Schüler wirklich verstehen, während sie an den Gebrauch des Ausdrucks "negative Zahl" nur so lange gewöhnt werden können, bis sie glauben, zu verstehen, was mit diesem Ausdruck gemeint sei. - Für das tatsächliche Verständnis (auch der Ausführungen in den Unterabschnitten 11.2 und 11.3) ist also Folgendes wichtig: Die Zeichen der Orientierungsfaktoren ("+1" und "-1") sind keine Zeichen für ('relative') Zahlen. Sie sind vielmehr mathematisch sehr zweckmäßig erdachte Symbole, die als Zeichen für - durchaus auch anders darstellbare - Orientierungsfaktoren fungieren. Sie sind zweckmäßig konstruiert, weil man mit ihnen gemäß den üblichen Algorithmen rechnen kann: - (-1) • 3 = + 3.

11.2. Die imaginären und die komplexen Zahlen bereiteten dem Verständnis noch größere Schwierigkeiten als die 'negativen'. Die Inder stießen zwar bei ihren Rechnungen bald auf das Problem, Quadratwurzeln aus (den ihnen bekannten) 'negativen Zahlen' zu ziehen; sie fanden aber keine Lösung und legten das Problem sozusagen ad acta: «Es gibt keine Quadratwurzel aus einer negativen Größe, denn diese ist kein Quadrat» (Bhaskara im 12. Jahrhundert, nach /5/). Nach der üblichen Auffassung ist ja zum Beispiel (+4) • (+4) gleich +16 und (-4) • (-4) ebenfalls gleich +16. Damit ist für das Verständnis des Nichtfachmanns $\sqrt[2]{+16}$ sowohl gleich +4 wie auch gleich -4.

In der Mathematik wird $\sqrt[2]{16}$ (nur) als diejenige positive Zahl definiert, deren Zweimalpotenz 16 ist. Demnach ist die Wurzel aus 16 nur die Zahl "4" (und nicht auch die Zahl "-4"). Nur wenn gefragt wird "Welche Lösung hat die Gleichung '$x^2 = 16$'?", antwortet der Mathematiker "$\sqrt[2]{+16}$" und "$\sqrt[2]{-16}$". Aber auch bei dieser. den Nichtfachmann merkwürdig anmutenden Aussage bleibt offen, was $\sqrt[2]{-16}$ sein soll.

Auf Wurzeln aus negativen Zahlen stieß im Abendland zuerst Gironimo (Girolamo) Cardano (1501 bis 1576) bei seinen Untersuchungen kubischer Gleichungen. Er fand, daß sich zum Beispiel die Zahl "40" in die beiden konjugiert komplexen Faktoren "5 + $\sqrt[2]{-15}$ " und "5 - $\sqrt[2]{-15}$ zerlegen läßt:

(11.4) $(5+\sqrt[2]{-15}) \bullet (5-\sqrt[2]{-15}) = 25 + 5 \bullet \sqrt[2]{-15} - 5 \bullet \sqrt[2]{-15} - (\sqrt[2]{-15})^2 = 25 - (-15) = 40.$

Cardano wollte aber von Quadratwurzeln aus ˙negativen Zahlen˙ nichts wissen. Auch François Vieta (1540 bis 1613) bestritt, daß Wurzeln aus ˙negativen Zahlen˙ existieren könnten. «Die guten Dienste, die die komplexen Zahlen in der Gleichungslehre leisteten, brachten es» aber «mit sich, daß das Rechnen mit komplexen Zahlen allmählich immer mehr in Aufnahme» kam /5/. «De Moivre (1667 - 1754) findet die Verknüpfung der komplexen Zahlen mit der Trigonometrie und den nach ihm benannten Satz über die Potenz einer komplexen Zahl. Fast gleichzeitig findet Euler (1707 - 1783) die Exponentialdarstellung der komplexen Zahlen und damit den Zauberschlüssel, der es ermöglicht, alle Rechenoperationen mit komplexen Zahlen auszuführen. Gauß (1777 - 1855) verknüpft die Koordinatengeometrie von Descartes mit den komplexen Zahlen durch das zahlenmäßige Analogon, die Zahlenebene. So legt Gauß den Schlußstein an das Gewölbe der komplexen Zahlen und verhilft ihnen damit zur allgemeinen Anerkennung» / 5/.

Wenn wir von der Auffassung ausgehen, daß nur die absoluten Zahlen Zahlen sind, bezeichnet eine Schriftfigur der Art " $\sqrt[2]{-16}$ " nicht die Quadratwurzel aus einer ˙negativen Zahl˙, sondern die Wurzel aus einem Zahlen-Orientierungs-Kombinat, nämlich die Wurzel aus dem Zahlenaxor "(-1) • 16". Was die Wurzel aus der Zahl "16" ist, ist klar: Sie ist die Zahl "4" und weder die ˙Zahl˙ "+4" noch die ˙Zahl˙ "-4". Wenn wir fordern (postulieren), daß wir mit den Orientierungsfaktoren ebenso rechnen können sollen wie mit den (absoluten) Zahlen, können wir statt " $\sqrt[2]{(-1)\bullet 16}$" auch schreiben " $\sqrt[2]{(-1)} \bullet \sqrt[2]{16}$ " = " $\sqrt[2]{(-1)} \bullet 4$". Das entspricht der Rechnung " $\sqrt[2]{4 \bullet 16} = \sqrt[2]{4} \bullet \sqrt[2]{16} = 2 \bullet 4 = 8$". Damit reduziert sich die Frage, was die Quadratwurzel aus einer ˙negativen Zahl˙ sein soll, auf die Frage, was die Quadratwurzel aus dem Orientierungsfaktor "-1" sein soll.

Eine Antwort auf diese Frage läßt sich unter zwei Voraussetzungen finden.

(1) Wir nehmen zu unserem Wissen, daß Zahlen ebenso auf einer Achse orientiert werden können wie Größen, noch das Wissen hinzu, daß es sehr oft zweckmäßig ist, physikalische Sachverhalte in einer Koordinatenebene darzustellen, die von zwei senkrecht aufeinander stehenden Achsen aufgespannt wird, bei der also die Ordinatenachse im Achsenschnittpunkt (Koordinatenursprung) um 90° gegen die Abszissenachse gedreht ist.

(2) Wir fordern (postulieren), daß man Zahlen nicht nur bezüglich einer Achse orientieren, sondern auch in einem Achsensystem richten kann. Wir konstruieren außer den Zahlenaxoren also auch Zahlenvektoren.

In einer von zwei Zahlenachsen aufgespannten Zahlenebene ist die Umorientierung eines Zahlenaxors ein Sonderfall einer Drehung eines Zahlenvektors: Sie ist dann eine Drehung um 180°. Der Orientierungsfaktor "-1" ist dann ein Drehfaktor, der die Drehung einer Zahl (wie auch einer Größe) um 180° bewirkt.

Zur Konstruktion einer Zahlenebene mit zwei senkrecht aufeinander stehenden Zahlenachsen benötigen wir gewissermaßen einen Drehfaktor, der diejenige Zahlenachse, die der Koordinatenachse eines kartesischen Koordinatensystems für geometrische und physikalische Größen entspricht, (nicht um 180°, sondern) um 90° aus der Lage der Abszissenachse herausdreht. (Diese Aussage impliziert, daß der Drehfaktor nicht nur Zahlen beziehungsweise Zahlenpfeile, sondern auch die Zahlenachse selbst um den Koordinatenursprung zu drehen vermag.) Der (eine Drehung um 90° bewirkende) Faktor müßte - zweimal hintereinander angewendet - eine Drehung um 180° bewirken und folglich mit sich selbst multipliziert den Drehfaktor "-1" (also einen der beiden bisherigen Orientierungsfaktoren) ergeben. Wenn wir mit Drehfaktoren so rechnen können wollen wie mit (absoluten) Zahlen, kann der gesuchte Drehfaktor durch den Ausdruck " $\sqrt[2]{(-1)}$ " dargestellt werden. Bei formaler Anwendung der üblichen Rechenregeln gilt ja:

(11.5) $\sqrt[2]{(-1)} \bullet \sqrt[2]{(-1)} = -1$

Damit ist die Frage beantwortet, wie wir die Quadratwurzel aus dem Orientierungsfaktor "-1" interpretieren können: "$\sqrt[2]{(-1)}$ " ist ein mathematisch sehr zweckmäßiges Symbol für einen Drehfaktor, der eine Zahl um 90° aus ihrem Ort auf dem ursprünglichen Zahlenstrahl herausdreht, so daß die Zahl nach der Drehung auf einer Achse liegt, die senkrecht auf der ursprünglichen steht (Bild 11.1). Für diesen Drehfaktor werden das Symbol " i " und - besonders in der Elektrotechnik - das Symbol "j" verwendet:

(11.6) $i = j = \sqrt[2]{(-1)}$

Der Buchstabe "i" ist der Anfangsbuchstabe des Wortes "imaginär". Dieses soll besagen, daß die mit diesem Wort gekennzeichneten Zahlen nicht reell (nicht ehrlich) sind, sondern nur in unserem Denken existieren (imago [lateinisch]: [Vorstellungs-]Bild). Dem entsprechend wird die Achse der imaginären Zahlen (i) als "i-Achse" bezeichnet und die der reellen Zahlen (r) als "R-Achse".

Der Buchstabe "j" wird in der Elektrotechnik verwendet, weil in dieser der Buchstabe "i" bei Wechselströmen für den «Augenblickswert» der elektrischen Stromstärke verwendet wird. (Das sonst übliche Zeichen "*I*" wird als Symbol für den «Effektivwert» der Stromstärke benutzt.)

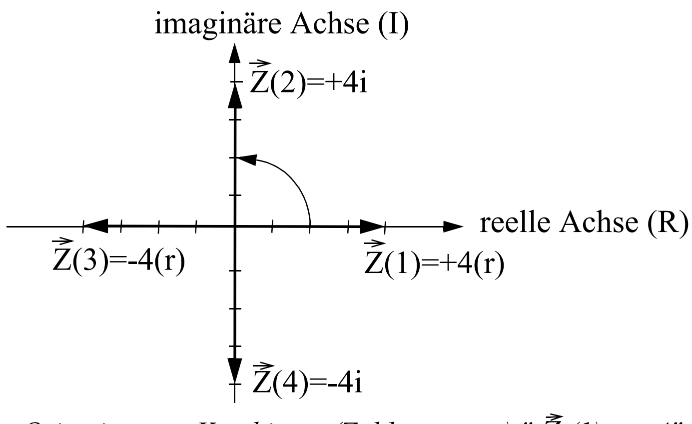

Bild 11.1. Die Zahlen-Orientierungs-Kombinate (Zahlenaxoren) " $\vec{\vec{Z}}$ (1) = +4" und " $\vec{\vec{Z}}$ (3) =-4 auf der Achse R der reellen Zahlen und die Zahlenaxoren " $\vec{\vec{Z}}$ (2) = (+i) • 4" und " $\vec{\vec{Z}}$ (4) = (-i)•4" auf der Achse I der imaginären Zahlen. - Der Drehfaktor "i = $\sqrt[2]{(-1)}$ *dreht eine Zahl im Linksdrehsinn um 90° aus ihrer jeweils vorhergehenden Lage.*

Wenn die aus dem positiven Abschnitt der R-Achse um 90° herausgedrehten Zahlen auf dem positiven Ast der I-Achse liegen sollen, ist noch zu fordern, daß der Faktor "$i = \sqrt[2]{(-1)}$ " die Zahlen links herum dreht.

Ein Symbol der Art "(-i) • 4" (= -4i; Bild 11.1) steht für "(-1) • i • 4". Das zweite Symbol besagt deutlich, daß die Zahl "4" vom positiven Ast der R-Achse um 90° auf den positiven Ast der i-Achse und um 180° vom positiven Ast der i-Achse auf deren negativen Ast gedreht ist. - Auch der Drehfaktor "-1" dreht eine Zahl (links herum) um 180° aus ihrer jeweils vorhergehenden Lage heraus.

Man könnte hier das Bedenken erheben, daß wir mit der Schriftfigur " $\sqrt[2]{(-1)}$ " doch wieder mit 'negativen Zahlen' arbeiten. Ein solches Bedenken wäre nicht stichhaltig. Es ginge von der Voraussetzung aus, daß das Symbol " $\sqrt[2]{(-1)}$ " die Wurzel aus einer 'negativen Zahl' symbolisiere, während hier gerade herausgestellt wird, daß es ein Zeichen für einen bestimmten Drehfaktor (und eben nicht ein Zeichen für die Wurzel aus einer 'negativen Zahl') ist. Dieses Zeichen hat sich ja nur ergeben, weil den Orientierungsfaktoren die Zeichen "+1" und "-1" (und nicht zum Beispiel die Symbole "gls" und "ggs") zugeordnet wurden. Dem Drehfaktor hätte auch ein ganz anderes Zeichen zugeordnet werden können. Und es wurde ihm - allerdings nachträglich - auch ein anderes Zeichen zugeordnet, nämlich der eben schon angeführte Buchstabe "i" beziehungsweise "j". Wäre der Drehfaktor von vornherein (zum Beispiel) mit "i" bezeichnet worden, hätte es sich bald als mathematisch zweckmäßig herausgestellt, ihm auch das Symbol " $\sqrt[2]{(-1)}$ zuzuordnen, weil sich dann für Drehungen um 90°, 180°, 270° und 360° die folgenden Drehfaktoren ergeben:

(11.7) $i = \sqrt[2]{(-1)} = +i,$

(11.8) $i^2 = i \cdot i = \sqrt[2]{(-1)} \cdot \sqrt[2]{(-1)} = -1$

(11.9) $i^3 = i \cdot i^2 = \sqrt[2]{(-1)} \cdot (-1) = -i$

(11.10) $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = +1$

Das bedeutet: Wird eine Zahl mit dem Drehfaktor "i" multipliziert, wird sie im Linksdrehsinn um 90° vom positiven Ast der Abszissenachse auf den positiven Ast der Ordinatenachse gedreht; wird sie mit $i^2 = -1$ multipliziert, wird sie um 180° auf den negativen Ast der Abszissenachse gedreht; wird sie mit $i^3 = -i$ multipliziert, wird sie um 270° auf den negativen Ast der Ordinatenachse gedreht; und wird sie mit $i^4 = +1$ multipliziert, wird sie um 360° auf den positiven Ast der Abszissenachse beziehungsweise überhaupt nicht gedreht.

Wird die Multiplikation mit i weiter fortgeführt, wiederholen sich die Ergebnisse:

(11.11) $i^{4+1} = +i$

(11.12) $i^{4+2} = -1$

(11.13) $i^{4+3} = -i$

(11.14) $i^{4+4} = +1$

Und diese Ergebnisse wiederholen sich auch nach jeder weiteren Volldrehung, also nach jeder Vierer-Periode von i:

(11.15) $i^{4n+1} = +i$

und so fort.

Mit der Einführung des Drehfaktors "i" und seiner Potenzen können wir Zahlen nicht nur auf der üblichen (reellen) Zahlenachse nach rechts und nach links abtragen, sondern auch auf einer zweiten (imaginären) Achse, die senkrecht auf der ersten steht, nach oben und nach unten.

Wenn man Zahlen-Drehfaktoren-Kombinate der Art "4i" als "imaginäre Zahlen" bezeichnet, gebraucht man diesen Namen für ein nur in unserem Denken existierendes Konstrukt und nicht für eine realontologisch vorfindbare Zahl einer besonderen Art. Nur die sogenannten absoluten Zahlen können als realontologisch vorfindbar bezeichnet werden: 5 ist die Anzahl einer Menge, zum Beispiel die Anzahl der Fingermenge einer menschlichen Hand; $\sqrt[2]{2}$ ist zum Beispiel der Quotient "Länge einer Quadratdiagonale durch Länge der zugehörigen Quadratseite"; die Ludolf-Zahl π ist zum Beispiel der Quotient "Länge eines Kreisumfangs durch Länge des zugehörigen Kreisdurchmessers". Die Achsen, auf denen wir die Zahlen anordnen, sind dagegen von uns erfundene Ordnungsmittel. Die Anordnung von Zahlen auf Zahlenachsen und die Vorstellung, daß Zahlen orientiert und gedreht werden können, ist eine schöpferische Leistung unseres konstruktiven Denkens. Es ist mathematisch sehr zweckmäßig, mit Konstrukten der Art "4i" zu rechnen; und es ist verständlich, daß Mathematiker in ihrem Bestreben, mit möglichst allgemein anwendbaren Begriffsbezeichnungen zu arbeiten, diese Konstrukte als "imaginäre Zahlen" bezeichnen. Es wäre aber didaktisch ungeschickt, diesen Namen von Anfang an allein zu verwenden und nicht auch den Namen zu gebrauchen, der unmittelbar besagt, um was es sich handelt, nämlich um einen Zahlenaxor. - Bei der hier vertretenen Auffassung ist eine Zahl ausschließlich das, was sich jeder Unverbildete unter einer "Zahl" vorstellt und was niemandem Schwierigkeiten bereitet.

Es sei noch angemerkt, daß nach der Einführung der Auffassung, daß die Orientierung ein Sonderfall der Drehung ist, die bis jetzt als "Zahlen-Orientierungs-Kombinate" bezeichneten 'negativen Zahlen' ein Sonderfall der Zahlen-Drehfaktoren-Kombinate sind.

So wie dem Pfeil eines Größenaxors auf der x-Achse eines x-y-Systems zum Beispiel das Symbol "+4x" (im allgemeinen nur "4x" geschrieben) zugeordnet wird und dem Pfeil eines Größenaxors auf der y-Achse das Symbol "+4y"("4y"), wird einem Zahlenpfeil auf der R-Achse eines R-i-Systems zum Beispiel das Symbol "(+)4r" (im allgemeinen nur "4" [also nicht "4r"] geschrieben) zugeordnet und einem Zahlenpfeil auf der i-Achse das Symbol "(+)4i" ("4i") (Bild 11.1). - Werden als Zahlensymbole Buchstaben verwendet, wird zum Beispiel statt "ni" (n • i) oft auch "i n" (i • n) geschrieben.

Die imaginären Zahlen sind also bei dieser Auffassung nicht Zahlen einer besonderen Art, sondern Kombinate aus (absoluten) Zahlen und einem Drehfaktor, der Zahlenaxoren links herum um 90° aus der Lage der reellen Achse herausdreht. - Und selbstverständlich sind auch die 'reellen Zahlen', deren Name erst im Zusammenhang mit dem Namen "imaginäre Zahlen" eingeführt wird, nicht Zahlen einer besonderen Art, sondern ebenfalls Zahlen-Drehfaktoren-Kombinate: -3 = (-1) • 3; +3 = (-1) • (-1) • 3 = (+1) • 3.

Damit dürfte klar sein, warum sich die Mathematiker früherer Zeiten so lange gegen die Einführung der ⁚negativen⁚ sowie der ⁚imaginären⁚ und der ⁚komplexen Zahlen⁚ sträubten: Sie hatten das Gespür dafür, daß diese ⁚Zahlen⁚ etwas anderes als Zahlen (und damit auch keine ⁚relativen⁚ Zahlen) sind - wenn sie sie auch noch nicht als Zahlen-Drehfaktoren-Kombinate erfaßten. Die späteren Mathematiker bekamen diese ⁚Zahlen⁚ zwar formal in den Griff, indem sie - ohne das so zu formulieren - das Zahlen-Drehfaktoren-Kombinat durch das Begriffskonstrukt "relative Zahl" ersetzten, damit aber auch begrifflich-terminologische Unklarheiten schufen. Die Zuordnung der verschiedenen ⁚relativen Zahlen⁚ zu den Zahlen-Drehfaktoren-Kombinaten zeigt die Tabelle 11.1.

Zahlen-Drehfakoren-Produkt	⁚relative Zahl⁚
(+1) • n	+n (positive reelle Zahl)
(-1) • n	-n (negative reelle Zahl)
(+i) • n	+in (positive imaginäre Zahl)
(-i) • n	-in (negative imaginäre Zahl)

Tabelle 11.1. Die einander entsprechenden (reellen und imaginären) Zahlen-Drehfaktoren-Produkte und (reellen und imaginären) ⁚relativen Zahlen⁚

Mit dem Konstrukt der reellen und imaginären ⁚Zahlen⁚ war es auf der einen Seite möglich, mathematisch einfach zu rechnen; auf der anderen Seite erschwerte es aber das Verständnis für die tatsächlichen Sachverhalte. Erst die vorstehende Klärung dürfte den Lernenden (und wohl nicht nur diesen) wirklich verständlich machen, was man unter diesen ⁚Zahlen⁚ zu verstehen habe, nämlich (orientierte) Zahlenaxoren.

Ich brauche nicht näher auszuführen, daß das, was vorstehend am Beispiel ganzer Zahlen erläutert wurde [$\overset{\rightrightarrows}{Z}(2) = i \cdot (+4) = +4i$], für alle Zahlen gilt, also auch für gebrochene, irrationale und transzendente [$\overset{\rightrightarrows}{Z}(5) = i \cdot \pi$]. Sie alle werden durch eine Multiplikation mit dem Drehfaktor "i" um 90° aus ihrer (vorhergehenden) Lage gedreht. (In Produkten mit dem Faktor "i" sollte möglichst der Multiplikationspunkt geschrieben werden, um daran zu erinnern, daß "i" als mathematischer Faktor zu verstehen ist.)

11.3. Im Besitz des R-i-Achsen-Systems ist es möglich, auch Zahlen darzustellen, die nicht auf einer der beiden Achsen liegen, sondern um einen beliebigen Winkel aus der Lage der R-Achse herausgedreht sind (Bild 11.2).

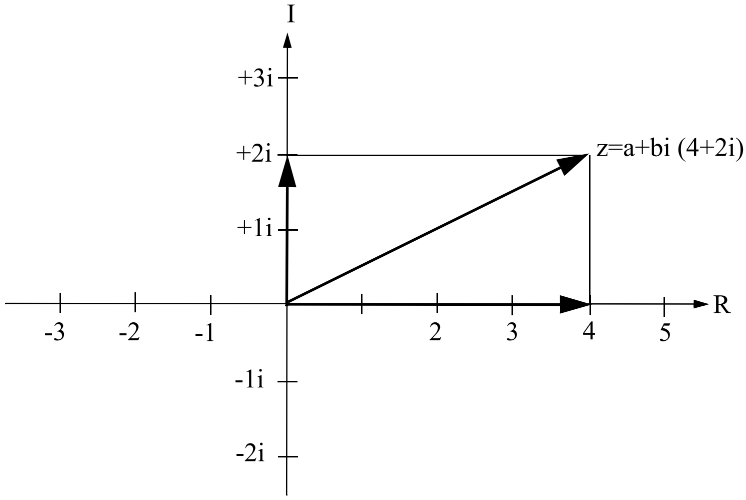

Bild 11.2. Zur Darstellung einer komplexen Zahl im R-I-Achsensystem

Um mit einem Abweichen von der üblichen Darstellung komplexer Zahlen dem an diese Darstellung gewohnten Leser nicht allzuviel zuzumuten, verzichte ich hier auf die ausdrückliche Kennzeichnung der Zahlenvektoren durch ein über das Zahlzeichen gesetztes Zweibein und verwende die weitgehend üblichen Zeichen "z" für komplexe Zahlen, "r für die «Beträge» der komplexen Zahlen, "a" für die reellen Komponenten (Realteile) der komplexen Zahlen und "ib" für deren imaginäre Komponenten (Imaginärteile).

Das Ausmaß (der «absolute Betrag») "r" wird auch als "Modul" der komplexen Zahl bezeichnet und der Winkel α zwischen dem Pfeil der komplexen Zahl und dem positiven Ast der R-Achse als ‚Argument" der komplexen Zahl.

Ein (gerichteter) Zahlenvektor "z = a + ib" (zum Beispiel z = +4 + 2i) kann - ebenso wie ein Größenvektor - beschrieben werden

(1) durch die (als Zahlenaxoren behandelbaren) achsenparallelen kartesischen Koordinaten des Vektorzielpols P(a,b) mit a = z_R (= +4) und b = zi (= +2i) oder

(2) durch die Polarkoordinaten "r = $\sqrt[2]{ia^2 + b^2}$ " (= $\sqrt[2]{4^2 + 2^2}$ = 4,472) und den Winkel φ.

Gemäß Bild 11.2 besteht zwischen den Polarkoordinaten "r" und φ einerseits und den kartesischen Koordinaten "a" und "b" andererseits die folgende Beziehung:

(11.16) $a = r \bullet cos(\varphi)$,

(11.17) $b = r \bullet sin(\varphi)$.

Damit kann für die komplexe Zahl "z = a + ib" auch geschrieben werden:

(11.18) $z = r \bullet cos(\varphi) + i \bullet r \bullet sin(\varphi) = r \bullet [cos\ (\varphi) + i \bullet sin\ (\varphi)]$.

11.18 ist die **Darstellung einer komplexen Zahl nach Leonhard Euler**.

Der Zahlenvektor kann nach der Erkenntnis Eulers - und das ist neu - also auch dargestellt werden

(3) durch das Produkt aus seinem Ausmaß (r) und dem Drehfaktor "cos(φ) + i • sin(φ)", der das Ausmaß der Drehung gegenüber dem positiven Ast der R-Achse beschreibt.

Diese Möglichkeit erfordert aber, daß man Drehfaktoren für Drehungen um beliebige Winkel angeben kann. Solche Faktoren können ohne besondere Schwierigkeiten aber nur für wenige Winkel berechnet werden, zum Beispiel für 45° und für 30°: Dreht der Faktor "i" eine Zahl (einen Zahlenpfeil) um 90°, dreht der Faktor " $\sqrt[2]{(i)}$ " die Zahl um 45° und der Faktor " $\sqrt[3]{(i)}$ " um 30°:

(11.19) $\sqrt[2]{(i)} \bullet \sqrt[2]{(i)} = i\ (45° + 45° = 90°)$,

(11.20) $\sqrt[3]{(i)} \bullet \sqrt[3]{(i)} \bullet \sqrt[3]{(i)} = i\ (30° + 30° + 30° = 90°)$.

Für beliebige Winkel φ fand erst Euler den (hier nicht abzuleitenden und mit Recht als "Zauberschlüssel" /5/ bezeichneten) Faktor

(11.21) $e^{i\bullet\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

der eine Exponentialfunktion mit trigonometrischen Funktionen verknüpft. e = 2,718 281 ... ist die Basis der sogenannten natürlichen Logarithmen.

Um plausibel zu machen, daß der Faktor 11.21 die an ihn gestellten Forderungen erfüllt, sei hier nur gezeigt, daß er für den Urwinkel $\varphi = 90°$ beziehungsweise für die (im Größenkalkül verwendete) Winkelersatzgröße $\varphi = \pi/2$ den uns schon bekannten Drehfaktor "+i" liefert:

(11.22) $e^{i\bullet\pi/2} = cos\ (\pi/2) + i\ sin(\pi/2) = 0 + i \bullet 1 = +i$.

Die große Bedeutung des Drehfaktors "$e^{i\bullet\varphi}$" liegt darin, daß man mit ihm auch dann mathematisch elegant arbeiten kann, wenn der in ihm enthaltene Drehwinkel φ keine Konstante ist, sondern eine variable Argumentengröße, wenn also der (mit diesem Drehfaktor dargestellte) Zahlenvektor im Koordinatensystem nicht eine bestimmte Richtung hat und beibehält, sondern sich um den Nullpunkt des Achsensystems dreht. (Der Zahlenvektor ist als 'Ortsvektor' im Nullpunkt des Systems verankert.) - Diese Anmerkung dürfte die Bedeutung der komplexen Zahlen für Physik und Technik ahnen lassen.

Sind wir zu Anfang dieses Abschnitts von der Betrachtung von Größen zu der von Zahlen zurückgegangen, so ist man im Verlauf der wissenschaftlichen Entwicklung umgekehrt von der theoretischen Erschließung der komplexen Zahlen zur Einführung komplexer Größen fortgeschritten. (Ich brauche nicht näher auszuführen, daß der Name "komplexe Größe" nach der hier vertretenen Auffassung für "Größen-Drehfaktoren-Kombinat" steht.)

«Vor allem in der modernen Elektrizitätslehre können die Gesetze des Wechselstroms viel einfacher und eleganter dargestellt werden, wenn man sich der komplexen Zahlen bedient. Die Verhältnisse der Radiotechnik und der gesamten Schwingungslehre sind ohne die Hilfsmittel der komplexen Zahlen gar nicht darstellbar. So sind die imaginären und komplexen Zahlen heute wichtige Hilfsmittel geworden. Es sind nicht, wie man früher dachte, nur in der Einbildung bestehende Phantome. Wenn sie vorher nicht theoretisch erfunden worden wären, so hätte die heutige Praxis der Elektrizität gebieterisch diese neuen Zahlen erzwungen, weil sonst die Rechnungen zu mühsam und umständlich geworden wären» /5/.

Zu diesen Ausführungen habe ich nur anzumerken, daß für das Verständnis der Sachverhalte meiner Meinung nach weniger die Einführung des Konstrukts "komplexe Zahl" als vielmehr die (in ihrer Bedeutung nicht klar genug erkannte) Auffindung und Herausstellung geeigneter Symbole für die Drehfaktoren von entscheidender Wichtigkeit ist. Sind die Drehfaktoren erst gefunden, ist die Konzeption des Begriffs "Zahlenvektor" praktisch mitgegeben und der Name "komplexe Zahl" neben dem Terminus "Zahlen-Richtungs-Kombinat" überhaupt nicht erforderlich. (Wenn die komplexen Zahlen als Zahlen einer besonderen Art aufgefaßt werden, sind sie doch «Phantome».)

Für den Fall, daß in den vorstehenden Ausführungen der Name „Zeiger" vermißt werden sollte, sei angemerkt, daß dieser Name heute normgemäß nur für die sogenannte komplexe Amplitude sinusförmiger Schwingungen verwendet wird /12/, also für einen technisch sehr wichtigen, für die hier durchgeführte Untersuchung aber zu speziellen Begriff.

Mit den vorstehenden Ausführungen dürfte auch klar sein, daß die bisherige Einteilung der "Zahlen" nicht aufrecht erhalten werden sollte, nämlich die (zum Beispiel auch in /5/ wiedergegebene) Einteilung in die absoluten Zahlen (die alle schon im klassischen Altertum bekannt waren) und in die relativen Zahlen mit den "positiven und negativen reellen Zahlen", den "positiven und negativen imaginären Zahlen " und den "komplexen Zahlen". Wie vorstehend schon deutlich geworden ist, gibt es nur

- Zahlen (und nicht «absolute Zahlen») mit den ganzen, den gebrochenen, den irrationalen und den transzendenten Zahlen,
- Zahlen-Orientierungs-Kombinate (reelle und imaginäre Zahlenaxoren) und
- Zahlen-Richtungs-Kombinate (Zahlenvektoren).

Sollte trotz dieser Klärungen an den Namen "reelle Zahlen", "imaginäre Zahlen" und "komplexe Zahlen" festgehalten werden, sollten nicht - wie üblich - die "imaginären und komplexen Zahlen" gemeinsam den "reellen Zahlen" gegenüber gestellt werden, sondern die "reellen und imaginären Zahlen" gemeinsam als "Achsenzahlen" oder "eindimensionale Zahlen" den "komplexen Zahlen" als "Ebenenzahlen" oder "zweidimensionalen Zahlen" /23/.

Für das kalkülgemäße Rechnen hat die Einführung der Zahlenvektoren - ebenso wie die der Größenvektoren - keine Bedeutung. Wenn konkret zu rechnen ist, muß mit den jeweiligen Modulen und Argumenten gemäß den Regeln des Größenkalküls gearbeitet werden. So könnte man zwar dem Pfeil eines Kraftvektors ein Symbol der Art "(5 + 2i) N" zuordnen, müßte numerisch aber doch rechnen:

(11.23) $|(5 + 2i)\ N| = \sqrt[2]{5^2 + 2^2}\ N = \sqrt[2]{29}\,vi = 5{,}385\ N.$

Ich habe noch einmal auf das Produkt der beiden (als "konjugiert komplex" bezeichneten) Zahlen "$5 + \sqrt[2]{-5}$ " und "$5 - \sqrt[2]{-5}$ " von Cardano einzugehen, um zu zeigen, daß sich die Zahl "40" nicht nur beim formalen Rechnen mit "negativen Zahlen" ergibt, sondern durchaus auch dann, wenn $\sqrt[2]{-1}$ nicht als eine Zahl besonderer Art, sondern als Drehfaktor aufgefaßt und wenn mit Drehfaktoren wie mit Zahlen gerechnet wird:

(11.24) $(5 + \sqrt[2]{-15}) \cdot (5 - \sqrt[2]{-15} = (5 + i \cdot \sqrt[2]{15}\ ) \cdot (5 - i \cdot \sqrt[2]{15}\ )$

$$= 25 + 5 \cdot i \cdot \sqrt[2]{15} - 5 \cdot i \cdot \sqrt[2]{15} - i^2 \cdot (\sqrt[2]{15}\ )^2$$
$$= 25 - (-1) \cdot 15 = 40$$

Entsprechendes gilt selbstverständlich für alle "konjugiert komplexen Zahlen" der Art "a + i • b" und "a - i • b" .

11.4 Daß viele nur glauben, die imaginären und die komplexen Zahlen (als Zahlen besonderer

Arten) zu verstehen oder sich gar des Nichtverstehens bewußt sind und ein Verstehen nur vorzutäuschen suchen, veranlaßte Robert Musil, in seinem Buch "Die Verwirrungen des Zöglings Törleß" eine - von ihm wohl selbst erlebte und als typisch empfundene - Situation zu beschreiben: Der (mathematisch durchaus begabte) Lehrer lobt zwar den Schüler, daß dieser wissen möchte, was imaginäre Zahlen tatsächlich sind, sagt zu dessen Frage aber nur, daß er diese Zahlen erst verstehen könne, wenn er zehnmal mehr Mathematik als bis jetzt gelernt haben werde.- Musil läßt den Leser spüren, daß auch der Lehrer nicht sagen kann, was imaginäre Zahlen (als Zahlen einer besonderen Art) sein sollen, und sich nur bemüht, vor dem (die Hilflosigkeit des Lehrers durchaus ahnenden) Schüler als ein in die Geheimnisse Eingeweihter zu erscheinen. - Um solche Situationen in Zukunft Lehrern wie Schülern zu ersparen, sollte die Auffassung, daß "relative Zahlen" Zahlen besonderer Arten seien, fallen gelassen werden. Wir erkennen rückblikkend, daß wir uns mit dem Orientieren von Zahlen, denen wir einen Gleitsinn zusprechen und die wir hinsichtlich eines von uns in die Betrachtung eingebrachten Bezugsgleitsinns orientieren, und mit dem Richten solcher Zahlen in einem von uns gezeichneten Koordinatensystem selber die Aufgabe schaffen, die Orientierung und die Richtung der Zahlen auch mathematisch in den Griff zu bekommen. Und das gelingt eben dadurch, daß wir Orientierungs- und Richtungsfaktoren erfinden (also selber konstruieren und nicht realontologisch vorfinden), und zwar Faktoren, die nach den Regeln des Größenkalküls behandelt werden können. Diese Faktoren und ihre Symbole können wir verstehen, weil wir sie selber konstruieren. An ihnen ist nichts Geheimnisvolles, das zu verstehen nur einer vergleichsweise kleinen Gruppe von Esoterikern vorbehalten bliebe. Werden diese Faktoren als von Menschen geschaffene Konstrukte beschrieben, werden sie auch von Schülern verstanden. Und dann brauchen diese nicht mehr mit einem Hinweis auf ihre noch mangelhaften mathematischen Kenntnisse und Fertigkeiten auf eine spätere Zeit vertröstet zu werden. Die "relativen Zahlen" sind nur unverständlich und damit geheimnisvoll, so lange man sie so irreführend bezeichnet; sie erweisen sich sofort als rational erfaßbar und als verständlich vermittelbar, wenn sie nicht als realontologisch vorfindbare Zahlen besonderer Arten aufgefaßt werden, sondern eben als von uns konstruierte Zahlen-Orientierungs- und Zahlen-Richtungs-Kombinate.

Damit sind diese Ausführungen nicht nur mathematisch und didaktisch, sondern auch wissenschaftstheoretisch von Belang: Sie lassen ahnen, daß das (vermeintliche) Analysieren wissenschaftlicher Sachverhalte häufig ein (oft unbewußtes) Konstruieren verständniserschließender Begriffe ist. Dieses besteht oft darin, daß wir die Sachverhalte unter bestimmten, vereinfachenden und von uns durchschaubaren Bedingungen betrachten und durch ein Modell beschreiben, das wir selber auf der Grundlage verstandenen Wissens konstruieren und das wir eben deshalb auch verstehen. In der weiteren "Analyse" werden schrittweise die vereinfachenden Bedingungen fallen gelassen und werden leistungsfähigere, aber wiederum verständliche Modelle konstruiert - bis sich im Idealfall eine ganze, von uns selbst geschaffene wissenschaftliche Theorie in ihrer ganzen Komplexität erschließt.

Eine solche Analyse durch aktives Konstruieren eines verständlichen Modells habe ich in /25/ am Beispiel der Auffindung eines biologischen Gesetzes eingehend beschrieben.