8. Zeichen für abgeleitete Größen, die dimensionsgleich, aber artverschieden sind.
Das pragmatische Element im Umgang mit physikalischen Größen

8.1. Längen können auch dann, wenn sie an verschiedene Sachen gebunden sind, hinsichtlich ihres Ausmaßes miteinander verglichen werden. Im Gegensatz dazu können Arbeit und Drehmoment (Arbeit und Betrag des Drehmoments), die beide in die Rechnungen nur als Kraft-Länge-Produkte ($W = F•l; M = F•l$) mit gleichartigen Einheiten der Art "1 Newton•Meter" (1 Nm) eingehen, nicht in eine Ausmaßrelation gestellt werden. Es wäre unsinnig, sagen zu wollen, daß eine Arbeit von 3 Nm ebenso groß oder größer oder kleiner als ein Drehmoment von 3 Nm sei. Arbeit und Drehmoment (Arbeit und Betrag des Drehmoments) sind trotz ihrer gleichen Dimension Größen verschiedener Art.

Um Mißverständnisse auszuschließen, sei betont, daß man aus noch zu besprechenden Gründen die Arbeit und das Drehmoment nicht unterschiedslos als Kraft-LängeProdukt "Fl" darstellt, sondern wie zwei unterschiedliche Kraft-Länge-Produkte "•s" •I(S)] und "•a" [•/(A)]. Das ändert aber nichts daran, daß die Weglängen und die Hebelarmlängen unterschiedslos in Einheiten der Art "1 m" und die Kräfte in Einheiten der Art "1 N" eingesetzt werden, so daß in Wahrheit nur mit einem (in Einheiten der Art "1 Nm" angegebenen) Kraft-Länge-Produkt einer einzigen Art gerechnet wird.

Es sei auch erwähnt, daß es sehr viele abgeleitete Größen gibt, die - aus einem noch zu besprechenden Grund - notwendig dimensionsgleich, aber doch artverschieden sind. So haben nicht nur Arbeit und Drehmoment (Betrag des Drehmoments), sondern auch Biegemoment Mb und Torsionsmoment T die (gleiche) Dimension "Kraft mal Länge, Fr. Und so haben - wie ebenfalls in der Norm als Beispiel angeführt -Volumen V, Widerstandsmoment W und Flächenmoment 1. Grades / die (gleiche) Dimension "Längenkubus, l^3". Andere vielbesprochene jeweils gleichdimensionale Größen sind zum Beispiel Winkel 9 und Wirkungsgrad rj, Drehenergie W_{rot} und Wirkung *w* sowie Magnetfluß 0 und Spannungsstoß *S*.

Die Zuordnung des Produkts "*F•l*" zu den verschiedenartigen Größen ‚Arbeit W" und "Drehmoment M" ist nicht umkehrbar eindeutig. Um trotzdem eine Verständigung sicher zu stellen, werden für dieses Kraft-Länge-Lage-Kombinate Produkt, das für zwei verschiedenartige Größen verwendet wird, eben die beiden Zeichen "Arbeit W" und "Drehmoment M" gebraucht. Diese stehen nicht für zwei gleichartige Kraft-Länge-Produkte, sondern für zwei verschiedenartige Kraft-Länge-Lage-Kombinate. Die Unterschiedlichkeit der beiden Kombinate wird in den Termen für das Kraft-Länge-Produkt dadurch zum Ausdruck gebracht, daß die Sachbindung der Länge angegeben wird: Kraft mal Länge des Verschiebungsweges, *F•l*(S) (üblicherweise: *F•s*), und Kraft mal Länge des Hebel(arm)s, *F•l*(A) (üblicherweise zum Beispiel: *F•a*).

Im einführenden Unterricht ist vorausgesetzt, daß die Kraftwirkungsgerade, längs der die verschiebende (arbeitsverrichtende) Kraft wirkt, und der Verschiebungsweg die gleiche Lage haben und daß die Kraftwirkungsgerade, längs der die die Drehbewegung verursachende Kraft wirkt, und der Hebel(arm) senkrecht aufeinander stehen.

Es fällt auf, daß das Vorliegen verschiedener Lagebeziehungen zwischen den Kraftwirkungsgeraden und den Längenhabern nur am Symbol für die Längen festgemacht wird, nicht aber auch an dem für die Kräfte. - Diese auffallende Asymmetrie soll nicht stillschweigend übergangen werden: Sie kann eine im Abschnitt 5 gemachte Aussage erhärten.

Eine Lage ist keine Eigenschaft, die einer einzelnen Sache zukäme, sondern eine Relation, die zwischen (mindestens) zwei Sachen besteht. Es gibt deshalb keine für sich allein bestehenden Länge-Lage-Kombinate, sondern nur Kraft-Länge-Lage-Kombinate. Man sollte deshalb erwarten, daß nicht nur bei der Länge, sondern auch bei der Kraft durch eine Sachbindungsangabe der Lagebezug zum Ausdruck gebracht wird.

Diese vielleicht überraschende Aussage verliert viel von ihrem etwaigen Überraschungseffekt, wenn an das Folgende erinnert wird. - Wenn später die Lagen der Kraftwirkungsgeraden und die der Wege beziehungsweise Hebel nicht mehr aufeinander, sondern auf ein für Kräfte und Längen gemeinsames Koordinatensystem bezogen werden, wird nicht nur den Längen, sondern auch den Kräften eine Richtung bezüglich dieses Systems zugeordnet. Und dann sind nicht nur die Längen, sondern auch die Kräfte gerichtete Größen oder Vektoren, und zwar unabhängig von der Frage, ob es sich beim jeweiligen Kraft-Länge-Produkt um ein inneres oder um ein äußeres Vektorprodukt handelt (Teil 2).

Mit Recht betrachtet niemand Kräfte, die an verschiedene Sachen (Translationsbewegung, Drehbewegung) gebunden sind und die zu anderen Sachen eine unterschiedliche Lagebeziehung haben, als verschiedenartige Kräfte; dem entsprechend listet auch niemand Kräfte mit verschiedener Sachbindung und verschiedenem Lagebezug wie verschiedenartige Größen auf: Der Kraft als solcher ist unwesentlich,

- - ob sie nur als verschiebende Kraft wirkt (wenn nämlich die Kraftwirkungsgerade durch den Schwerpunkt eines nicht festgehaltenen Dinges geht und dieses - da weitere Kräfte fehlen - nur verschoben wird), oder
- - ob sie nur als drehende Kraft wirkt (wenn nämlich die Kraftwirkungsgerade an der Drehachse eines achsgelagerten Dinges vorbeigeht und das Ding [aufgrund des Zusammenwirkens der betrachteten Kraft und einer von der Achslagerung auf das Ding ausgeübten zweiten Kraft] nur eine Drehbewegung erfährt), oder
- - ob sie sowohl verschiebend wie drehend wirkt (wenn nämlich die Kraftwirkungsgerade am Schwerpunkt eines nicht gelagerten Dinges vorbeigeht und das Ding [aufgrund des Zusammenwirkens der betrachteten Kraft und der am Schwerpunkt des Dinges angreifenden Trägheitskraft] in eine translatorische und rotatorische Bewegung versetzt wird).

Entsprechendes gilt aber auch für die Längen. Auch diesen ist unwesentlich, ob sie Längen von Wegstrecken, Hebelarmen, Kanten oder sonstigen Sachen sind. Das unterstreicht, daß es unsachgemäß ist, sachgebundene und lagebezogene Längen wie Größen verschiedener Art aufzulisten. So wie alle Kräfte Größen der gleichen Art (und nicht nur der gleichen Dimension) sind, sind auch alle Längen Größen der gleichen Art (und nicht nur der gleichen Dimension). Diese Aussage ändert aber nichts daran, daß die Sachbindung und der Lagebezug der Größen für das Verständnis dessen, was man beim Rechnen mit Größen macht, ganz wesentlich sind und daher auch zum Ausdruck gebracht werden müssen - und sei es auch nur durch die Angabe der Sachbindung lediglich einer der beiden Größen, die als Faktoren in ein Produkt zweier Größen eingehen.

8.2. Es ist gelegentlich schon gesagt worden, daß der Größenkalkül nicht trennscharf bis zu den Größen, sondern nur trennscharf bis zu den Dimensionen sei - in unserem Beispiel also nicht bis zu Arbeit W und Drehmoment M, sondern nur bis zum Kraft-Länge-Produkt. Jetzt können wir deutlicher sagen: Der Größenkalkül ist (in unserem Beispiel, in dem nur mit skalaren Größen beziehungsweise mit skalaren Beträgen vektorieller Größen gerechnet wird) nur trennscharf bis zum Kraft-Länge-Produkt, aber nicht trennscharf bis zu den Kraft-Länge-Lage-Kombinaten. Diese Kombinate behält aber der Kalkülbenutzer im Kopf und sagt und schreibt eben deshalb für Arbeit und Drehmoment nicht undifferenziert "Kraft mal Länge, $F \bullet l$", sondern eben einmal "Arbeit = Kraft mal Weglänge, W = $F \bullet l$(S)" (W = $F \bullet s$) und einmal "Drehmoment = Kraft mal Hebelarmlänge, M = $F \bullet l$(A)" ($M = F \bullet a$).

Damit sind die Schwierigkeiten aber noch nicht behoben. - Da die Einheit einer Größe nur deren Art und Ausmaß erfaßt und in sie deshalb kein Hinweis auf eine Sachbindung oder eine Lagebeziehung eingeht, werden alle Arbeiten und Drehmomente allein in Einheiten der Art "1 Nm" angegeben. Da es mathematisch gesehen kein Verbot gibt, die Größe "3 Nm", die eine Arbeit ist, und die Größe "5 Nm", die ein Drehmoment ist, zu addieren (die Addition lieferte "8 Nm"), tritt die Frage auf, auf welche Weise eine Addition dimensiongleicher Größen verschiedener Art ausgeschlossen wird. Auf diese Frage gibt es keine semantisch befriedigende Antwort. Solange verschiedenartige abgeleitete Größen durch jeweils gleichartige Produkte anderer Größen dargestellt werden, kann die semantische Forderung von der umkehrbar eindeutigen Zuordnung von Zeichen und Bezeichnetem nicht erfüllt werden. Das beunruhigt manche Praktiker und Normbearbeiter und läßt diese fragen, ob das, was beim Größenrechnen so erfolgreich gemacht wird, mathematisch einwandfrei ist. Diese Frage trifft nicht den Kern des Problems. Das Rechnen mit Größen kann mathematisch gerechtfertigt werden.

Mathematisch kann man sogar erheblich mehr machen, als physikalisch interpretierbar ist. So wird zum Beispiel im Fall einer adiabatischen Zustandsänderung im allgemeinen die Gleichung = konst" benutzt. Ist V = 3 m^3 und x= 1,4, ist die Potenz "(3 $rn^3)^{14}$" zu bilden. Das ist mathematisch leicht möglich:
$(3\ m3)^{14} = 3^{1,4}.m^{3 \cdot 1,4} = 3^{1,4}\ m^{4,2}$.

Wie ist aber die Größe "1 $m^{4,2}$" physikalisch zu interpretieren? Nach der am weitesten verbreiteten Auffassung (siehe Abschnitt 15) sind beim Rechnen mit Größen nur Potenzen mit ganzzahligen Exponenten (wie $1m^2$ oder $1m^3$) definiert.

In Frage steht nur, ob das Rechnen mit Größen semantisch eindeutig durchgeführt werden kann. Und diese Frage ist klar mit "nein" zu beantworten: Solange artverschiedene Größen als gleichdimensional behandelt werden beziehungsweise behandelt werden müssen, gibt es kein Umgehen mit Größen, das in jedem Fall semantisch eindeutig wäre. Die Rechtfertigung des tatsächlichen und erfolgreichen Umgehens auch mit gleichdimensionalen abgeleiteten Größen ergibt sich aus einem ganz anderen Sachverhalt. Es ist nämlich noch nie ein Fachmann in die Versuchung geraten, eine Arbeit und ein Drehmoment zu addieren. Das liegt daran, daß der Fachmann beim Rechnen mit Arbeiten und mit (Beträgen von) Drehmomenten, bei dem diese beiden Größen mathematisch nur als Kraft-Länge Produkte (und nicht als Kraft-Länge-Lage-Kombinate) behandelt werden, aus dem Sachzusammenhang weiß, ob er es mit einer Arbeit oder einem Drehmoment zu tun hat. Kein Fachmann verliert beim Rechnen die physikalischen Sachverhalte als solche aus den Augen. Er hat im Hinterkopf immer entweder die Gleichung "W_1 = 3 Nm" oder die Gleichung "M_1 = 5 Nm", auch wenn er während des Rechnens nicht die Gleichungen schreibt, sondern lediglich die Größenterme („3 Nm"; "5 Nm") oder sogar nur die Zeichen für die sogenannten Zahlenwerte („3"; "5"). Ob wir gleichdimensionale Größen verschiedener Art (3 Nm als Arbeit und 5 Nm als Drehmoment) addieren dürfen oder nicht, ersehen wir nicht daraus, ob wir diese Größen in eine Ausmaßrelation stellen können (3 Nm < 5 Nm) oder nicht; wir entnehmen das vielmehr den Sachzusammenhängen und den Angabegleichungen selbst (W_1 = 3 Nm; M_1 = 5 Nm). Diese zeigen von vornherein und unmittelbar, ob es sich um gleichartige oder um verschiedenartige Größen handelt und ob diese addiert werden dürfen oder nicht. Das Mitschreiben (oder zumindest das beim Fachmann vorauszusetzende Mitdenken) der Symbole "W" beziehungsweise "M" ermöglicht es, die physikalische Natur der Kraft-Länge-Produkte nicht aus den Augen zu verlieren. Das entspricht formal der Verwendung zweier verschiedener Symbole für die Weg- beziehungsweise Hebelarmlängen. Gehen solche Längen in eine Rechnung ein und werden ihre sachgebunden formulierten Symbole "l(S)" („s") beziehungswiese "l(A)" („a") mitgeschrieben (oder zumindest mitgedacht), ergibt sich am Ende der Rechnung nicht nur ein einheitengebundener Term für ein Kräft-Länge-Produkt (zum Beispiel "3 Nm"), sondern auch die Information, daß es sich um eine Arbeit oder um ein Drehmoment handelt (zum Beispiel durch die geschriebene [oder zumindest mitgedachte] Gleichung "W_1 = 3 Nm").

Der wesentliche begrifflich-sachliche Unterschied zwischen diesen beiden Fällen besteht darin, daß die genannten Längen Größen der gleichen Art sind, während Arbeit und Drehmoment verschiedenartige Größen sind. Das begründet, warum sich die Zeichen (Namen und Symbole) für die Längen nur durch eine die Sachbindung kennzeichnende Angabe am jeweils gleichen Größenzeichen unterscheiden, [Weglänge l(S); Hebelarmlänge l(A)], während für Arbeit und Drehmoment unterschiedliche Größennamen und unterschiedliche Größensymbole (W; M) verwendet werden.

Es ist zweifellos semantisch unbefriedigend, daß ein Term der Art "3 Nm" sowohl einer Arbeit wie auch einem Drehmoment (und auch Größen noch anderer Arten) zugeordnet werden kann, führt aber - wie eben gesagt - in der Praxis nicht zu ernsthaften Schwierigkeiten. Das liegt daran, daß das syntaktische Instrument des Größenkalküls nicht unabhängig von pragmatischen Begleitmaßnahmen angewendet wird.

Pragmatik ist die Wissenschaft von den Beziehungen zwischen den Zeichen und den Zeichenbenutzern (Zeichensendern und Zeichenempfängern) und damit eine Teildisziplin der Semiotik, der Wissenschaft von den Zeichen. Die beiden anderen Teildisziplinen der Semiotik sind die Syntaktik, die Wissenschaft von den Beziehungen der Zeichen zueinander, und die Semantik, die Wissenschaft von den Beziehungen zwischen den Zeichen und deren Bedeutung.

Solange man mit verschiedenartigen gleichdimensionalen Größen arbeitet und solange damit zum Beispiel das Produkt "Kraft mal Länge, $F \cdot l$" verschiedene Bedeutungen hat (Arbeit, Drehmoment, Torsionsmoment, Biegemoment), ist es nicht möglich, eine "semantische Konstanz" durchzuhalten. Deshalb ist es erforderlich, daß der Zeichensender (Sprecher, Schreiber) dem Zeichenempfänger (Hörer, Leser) die jeweils gemeinte Bedeutung signalisiert, also die Verständigung durch eine pragmatische Maßnahme sicherstellt. (Zeichensender und Zeichenempfänger können ein und dieselbe Person sein.) Der Größenkalkül als innermathematisches und damit "rein" syntaktisches Instrument erfaßt nur Kraft-Länge-Produkte (und nicht auch Kraft-Länge-Lage-Kombinate) und läßt deshalb allein nicht erkennen, um welche Größe es sich jeweils handelt. Das ist nur dem Sachzusammenhang (Kontext) zu entnehmen und wird durch die Verwendung der unterschiedlichen Größenzeichen festgemacht und während der Bearbeitung der betreffenden Aufgabe nicht aus den Augen verloren. Erst die pragmatische Maßnahme, mit der der Zeichensender (sich und anderen) signalisiert, um welche von mehreren gleichdimensionalen Größen es sich handelt, macht den Größenkalkül zu einem praktikablen Instrument für Naturwissenschaftler und Techniker, nämlich zu einem Instrument, das als syntaktisches Instrument zwar nur trennscharf bis zu dimensionsgleichen Größen arbeitet, als pragmatisch gehandhabtes Instrument aber Ergebnisse liefert, die bis zu artverschiedenen Größen aufgeschlüsselt sind. Der tatsächliche Umgang mit Größen erfolgt also nicht nur-syntaktisch und nicht einmal nur-syntaktisch-semantisch, sondern syntaktisch-semantisch-pragmatisch.

Wir dürfen nicht nur gebannt auf die semantisch unbefriedigende Tatsache sehen, daß es verschiedenartige Größen gibt, die dimensionsgleich sind und folglich in Einheiten der jeweils gleichen Art angegeben werden. Die bisherigen Versuche, diese unerfreuliche Tatsache syntaktisch-semantisch in den Griff zu bekommen, haben - notwendig - zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt. Der Praktiker braucht deshalb aber keine Skrupel zu haben: Wenn es auch nicht möglich ist, ausschließlich (semantisch) eindeutige Zeichen zu verwenden, können die Zeichensender die jeweilige Bedeutung den Zeichenempfängern doch mit Hilfe pragmatischer Maßnahmen eindeutig signalisieren. Das ist das Kommunikationsmittel, das der Praktiker erfolgreich nutzt, um Kontextinformationen in das Arbeiten mit Größen einzubringen, und das bis jetzt offenbar zu wenig bewußt geworden ist. Die pragmatischen Maßnahmen kompensieren die hier in Rede stehenden semantischen Unzulänglichkeiten und rechtfertigen damit den tatsächlich praktizierten erfolgreichen Umgang mit physikalischen Größen.

Über dieser positiven Aussage ist nicht zu vergessen, daß es noch eine Schwierigkeit gibt: Aus Gleichungen der Art

(8.1) $W_1 = 3$ Nm und

(8.2) $M_1 = 3$ Nm

folgt

(8.3) $W_1 = M_1$,

beziehungsweise, wenn wir von den immer durch Art und Ausmaß bestimmten Größen nur deren Art betrachten,

(8.4) $W = M$,

in Worten: Arbeit ist gleich Drehmoment.

Das ist das kontradiktorische Gegenteil der zutreffenden Aussage, daß Arbeit und Drehmoment verschiedenartige Größen sind.

Bevor diese Unstimmigkeit geklärt werden kann, sind noch andere Betrachtungen anzustellen. Zum Schluß dieses Abschnitts sei lediglich noch betont, wie wichtig es ist, **grundsätzlich** mit Größengleichungen (wie "$W_1 = 3$ Nm") und nicht allein mit einheitengebundenen Größentermen (wie "3 Nm") oder gar nur mit «Zahlenwerten» (wie "3") zu arbeiten. Denn nur die Symbole für die sachgebunden angegebenen Größen (wie "W_1"), die in den Gleichungen (mit-) geschrieben werden, nicht aber die einheitengebunden angegebenen Größen allein („3 Nm") signalisieren auch bei gleichdimensionalen Größen deren jeweilige Art.