6. Zeichen für sachgebunden angegebene Eigenschaften als Hinweise auf bestimmte Lagebeziehungen. Explikation der Begriffe "Lage" und "Länge"

6.1. In der Norm DIN 1313 von 1978 wird nicht nur vom Beibehalten von Sachbezügen gesprochen, sondern auch vom Beibehalten von «Vektor- und Tensorcharakter» der Größen (Abschnitt 5). Damit ist zu fragen, ob die in Rede stehenden Symbole in der Norm DIN 1304 nicht nur wegen verschiedener Sachbindungen, sondern auch wegen verschiedener Richtungsbindungen der mit den Symbolen bezeichneten Größen in der beschriebenen Weise aufgelistet werden. Erfordern vielleicht verschiedene «Richtungscharaktere» der in Rede stehenden Längen, diese als verschiedenartig zu betrachten?

Die Zeichen "Länge l", "Breite b" und "Höhe h" (um mich zunächst auf diese zu beschränken) sind den Kanten eines (in erster Näherung) als Quader aufgefaßten Dinges zugeordnet und unterscheiden sich voneinander nicht nur durch ihr Ausmaß und ihre Bindung an verschiedene Kanten, sondern auch noch dadurch, daß sie Längen von Kanten sind, die zueinander in einer bestimmten **Lagebeziehung** stehen: Die Kanten stehen immer senkrecht aufeinander, gleichgültig in welcher räumlichen Stellung sich das quaderförmige Ding befindet.

Da der Begriff der Lage auch im Hinblick auf den erst im zweiten Teil näher zu besprechenden Begriff der Richtung sehr wichtig ist, gehe ich auf ihn ausführlich ein. - Zunächst ist festzuhalten, daß man bei einer isoliert (also bei einer als allein existierend) betrachteten Geraden nicht von einer Lage sprechen kann. Eine Lage ist keine Eigenschaft einer Sache, sondern eine Relation zwischen (mindestens) zwei Sachen. Eine Gerade hat immer nur in Bezug auf eine andere Gerade (zum Beispiel auch in Bezug auf die Achsen eines Koordinatensystems oder in Bezug auf die Begrenzungsseiten eines zu einer Zeichnung verwendeten Papierblattes) eine bestimmte Lage.

Was eine Lage ist, kann mit Hilfe des Bildes 6.1 expliziert werden. Man zeichnet mit Hilfe eines Lineals zum Beispiel die Gerade A_1, zeichnet in zwei auf der Geraden liegenden Punkten mit Hilfe eines Zirkels und eines Lineals (in der vom Geometrieunterricht her bekannten Weise) je eine Senkrechte, trägt auf diesen (mit Hilfe des Lineals oder des Zirkels) zwei gleich lange Strecken ab und zeichnet durch deren Endpunkte (mit Hilfe des Lineals) eine Gerade A_2. Diese wird als eine "Parallele zur Geraden A_l" bezeichnet. In gleicher Weise werden weitere Parallelen A_i gezeichnet. Dann zeichnet man eine Gerade B_1 und zu dieser parallele Geraden B_i. (Es ist hier nicht zu beschreiben, wie Lineal und Zirkel hergestellt werden.) Dann wird festgelegt:

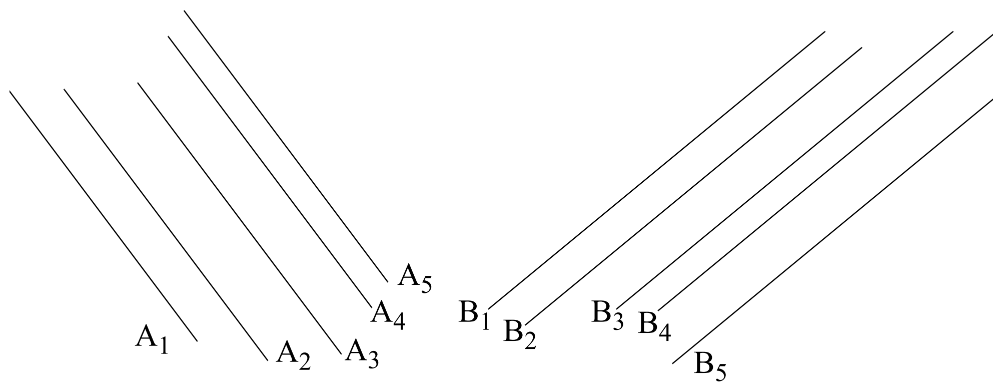

Bild 6.1. Zur Explikation des Begriffs "Lage"

Lage ist das, was allen Geraden A_i gemeinsam ist und was allen Geraden B_i gemeinsam ist und was bei den Geraden A_i anders ist als bei den Geraden B_i. Der zweite Teil der Aussage ist erforderlich, damit jemand - wenn ihm nur der erste Teil gesagt würde - aus dem Bild 6.1 nur den (in das Bild 'hineingesteckten') Begriff der Parallelität herausliest. Die Geraden A_i sind einander parallel, ebenso die Geraden B_i; die Geraden A_i haben aber - sowohl auf dem Zeichenpapier wie in Bezug auf die Geraden B_i - eine andere Lage als diese. "Eine Lage haben" ist etwas Allgemeineres und damit etwas Anderes als "die gleiche Lage haben". Der Begriff der Lage kann offenbar nicht expliziert werden, ohne zugleich den Begriff der gleichen Lage beziehungsweise den der Parallelität zu gebrauchen, also ohne diese beiden Begriffe zugleich einzuführen.

Die Ausdrücke "parallel sein" und "die gleiche Lage haben" sind nicht gleichbedeutend. Sie dienen zwar der Beschreibung des gleichen Sachverhalts, sind aber verschiedenen Begriffen zugeordnet (Näheres hierzu im Abschnitt 9). "Parallel sein" ist der Name eines ontologischen Bezogenseins; "die gleiche Lage haben" ist dagegen der Name einer Relation (Abschnitt 3). Der Satz "Parallele Geraden haben die gleiche Lage" ist deshalb kein Pleonasmus, sondern verknüpft ein ontologisches Bezogensein mit einer nur in unserem Denken existierenden Relation.

Das Bild 6.1 benutzte ich in früheren Arbeiten zur (unzutreffenden) Explikation des Begriffs "Richtung". Eine Richtung ist aber - wie im zweiten Teil der Arbeit zu klären ist - etwas anderes als eine Lage. Mit Bild 6.1 kann nur diese expliziert werden.

Der im Vorstehenden nur für Geraden definierte Begriff der Lage gilt selbstverständlich auch für einseitig und beidseitig begrenzte Geradenstücke, also auch für Halbgeraden und für Strekken, und kann zwanglos auch für zweidimensionale geometrische Figuren angewendet werden, indem man deren Lage als die Lage einer auf den Figuren ausgezeichneten oder auszuzeichnenden Strecke definiert (Bild 6.2).

Der Begriff der Lage ist unabhängig vom Begriff des Ortes. Zwei Figuren können sich an verschiedenen Orten und in verschiedenen Lagen befinden. Und ein und dieselbe (zunächst als rund betrachtete) Figur kann sich (auch) an ein und demselben Ort in verschiedenen Lagen befinden (Bild 6.2). Der Ort einer Figur kann als der Ort des Figurenschwerpunkts definiert und mit Hilfe der Koordinaten dieses Punktes angegeben werden. Und die Lage der Figur kann - wie eben gesagt - als die Lage einer Strecke definiert werden, die auf der Figur schon ausgezeichnet ist oder erst auszuzeichnen ist, und kann mit Hilfe des Winkels angegeben werden, den diese Strecke mit einer der beiden Koordinatenachsen einschließt (Bild 6.2).

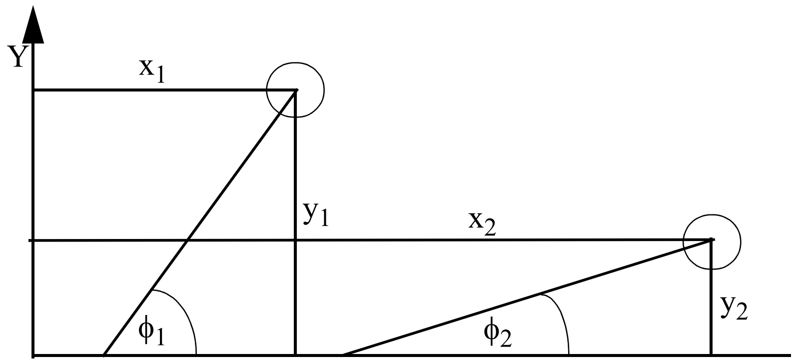

Bild 6.2. Zwei gleich große Kreisflächen mit einem ausgezeichneten Durchmesser an verschiedenen Orten und in verschiedenen Lagen

Diese Aussagen können zwanglos auch auf nicht kreisförmige Figuren übertragen werden. - Wichtig ist, daß der Begriff der Lage nicht auf den Begriff des Ortes zurückgeführt werden kann und damit in gleicher Weise eine Kategorie ist wie der Begriff des Ortes. Ortsänderungen sind

Translationsbewegungen; Lageänderungen sind Drehbewegungen (Rotationsbewegungen).

Da ich im Vorstehenden von der räumlichen Stellung von Dingen sprach, sei hier auch der Begriff der Stellung expliziert: Stellung ist das, was allen parallelen Ebenen E_i gemeinsam ist und was allen parallelen Ebenen F_i gemeinsam ist und was bei den Ebenen E_i anders ist als bei den Ebenen F_i (Bild 6.3)

.

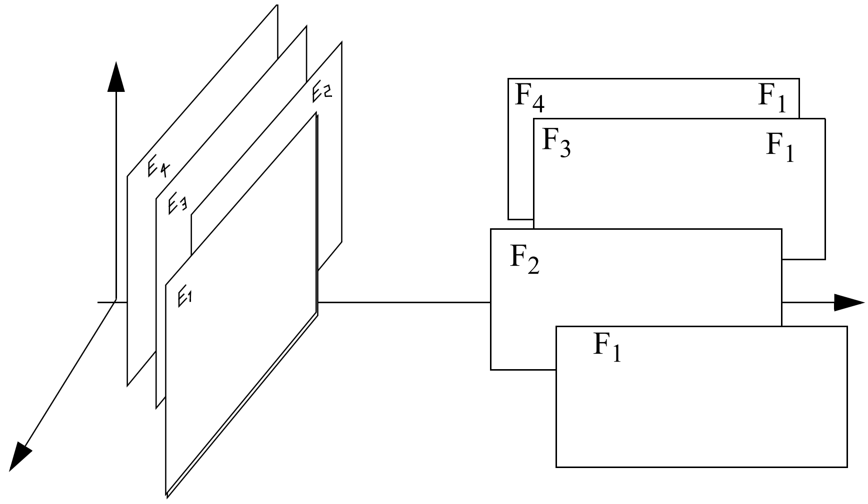

Bild 6.3. Zur Explikation des Begriffs "Stellung"

Der Begriff "Stellung" kann auch auf dreidimensionale Figuren und (materielle) Dinge übertragen werden, zum Beispiel indem man die Stellung eines Quaders als die Stellung einer bestimmten Seitenfläche des Quaders definiert.

Damit komme ich zum Hauptgedankengang zurück. - Wenn wir die Sachen und Eigenschaften terminologisch unterscheiden, sind die in der Norm aufgeführten Wörter "Länge", "Breite" und "Höhe" durch Namen wie "Längskantenlänge", "Breitkantenlänge" und "Hochkantenlänge" zu ersetzen. Diese Namen besagen unmittelbar, daß es sich allein um die Eigenschaft "Länge" handelt (auch wenn diese an verschiedene Längenhaber gebunden ist), und vermeiden die Doppeldeutigkeit des Wortes "Länge": Länge als Eigenschaft (Länge der 'Länge') und 'Länge' als Sache (Länge der 'Länge').

Der Wortteil "längs-" im Namen "Längskantenlänge" weist nicht auf die Eigenschaft "Länge" als solche hin, sondern auf eine bestimmte Lage der gemeinten Kante - sei es, daß diese in Richtung der Haupterstreckung des Quaders liegt, sei es, daß sie hinsichtlich der Blickrichtung des Betrachters ausgezeichnet ist.

Namen wie "Längskantenlänge" (und die an deren Stelle verwendeten 'verkürzten' Namen wie "Länge") bezeichnen also nicht nur sachgebunden angegebene Eigenschaften, sondern weisen auch noch darauf hin, daß die Längenhaber zueinander in einer bestimmten Lagebeziehung stehen. Auch die Namen "Grundlinienlänge" ('Grundlinie') und "Höhenlänge" ('Höhe') bezeichnen nicht nur die Eigenschaft "Länge" und die längenhabende Sache, sondern erinnern ebenfalls daran, daß die Grundlinie und die Höhe senkrecht aufeinander und damit in einer bestimmten Lagebeziehung zueinander stehen.

Mit der Lagebeziehung der Längenhaber ist eine Relation in den Blick gekommen, die sich wesentlich von der bis zum Abschnitt 5 allein betrachteten Ausmaßrelation unterscheidet. Sie ist - wie diese -mathematisch behandelbar, wird aber an dieser Stelle der Erkenntnisvermittlung noch nicht mathematisch behandelt. Es muß deshalb auf andere Weise darauf hingewiesen werden, daß der jeweilige Längenhaber zu anderen Längenhabern in einer bestimmten Lagebeziehung steht. Und das geschieht bei den genannten Längen offenbar dadurch, daß die Angabe der Sachbindung („Längskantenlänge") auch als Hinweis auf eine bestimmte Lagebeziehung fungiert. Die Längen als solche sind aber auch bei unterschiedlichen Lagen der Längenhaber Eigenschaften (Größen) der gleichen Art: Eine Längskantenlänge von 5 m ist eine größere Länge als eine Breitkantenlänge von 3 m. Auch die Funktion der Sachbindungsangabe als Hinweis auf eine bestimmte Lagebeziehung rechtfertigt also nicht, zum Beispiel Längskantenlänge und Breitkantenlänge wie Größen verschiedener Art aufzulisten.

Wenn wir einen Vorgriff auf die erst im Abschnitt 8 näher zu besprechenden Größen "Arbeit W" und "Drehmoment M" machen, können wir an dieser Stelle auch das Folgende sagen: Auch die (zu Beginn des betreffenden Unterrichtsabschnitts noch erforderliche) Verabredung, daß bei der Arbeit der Weg und die Gerade, längs der die verschiebende Kraft wirkt, immer die gleiche Richtung haben, und daß beim Drehmoment der Hebelarm und die Gerade, längs der die drehende Kraft wirkt, immer senkrecht aufeinander stehen, rechtfertigt nicht, die Weglänge l(S) und die Hebelarmlänge l(A) wegen deren unterschiedlichen Lage zur jeweiligen Kraftwirkungsgeraden als artverschieden aufzufassen.

Bei den Längen (und anderen Eigenschaften) kann man - wenn sie lediglich als Ausmaßeigenschaften betrachtet werden - von vornherein nicht sagen, daß sie einen «Vektor- oder Tensorcharakter» hätten, so daß auch dieser «Charakter» für die Kennzeichnung der Eigenschaften als solcher belanglos ist. Wir lassen deshalb (nach der Sachbindung) auch den «Vektor- oder Tensorcharakter» als Konstituente von Eigenschaften fallen. - Ob er als Konstituente von «Größenarten» im Sinne der Norm DIN 1313 beizubehalten ist, ist noch zu klären. Bis dahin werde ich die Namen "Art einer Größe" und "Dimension einer Größe" und ebenso Namen wie "dimensionsgleich" und "artgleich" in der üblichen Weise weiterverwenden.

Damit komme ich zu dem Ergebnis, daß die in der Norm vorgeschlagenen Symbole für die verschiedenen sach- und richtungsgebundenen Längen nur mit der Kürze des Ausdrucks begründet werden könnten. Da diese Zeichen aber semantisch unbefriedigend sind, sollten sie meiner Meinung nach vermieden werden. Es wäre angebrachter, Zeichen für bestimmte Sachklassen zu normen, zum Beispiel "G" für Grundlinie, "L" für Längskante, "S" für Weg(strecke), "A" für Hebelarm, ..., um die sachgebundenen Längen mit Hilfe dieser Zeichen normgemäß zu indizieren. In einer Neuauflage der Norm DIN 1304 wäre dann neben den verschiedenartigen anderen Größen nur die Länge l als Größe anzuführen. Die sachklassengebundenen Längen sollten in der Tabelle allenfalls eingerückt aufgelistet werden:

l Länge
1(G) Grundlinienlänge
1(L) Längskantenlänge
l (S) Weglänge
1(A) Hebelarmlänge
....

Mit Zeichen dieser Art wären Gesetzesgleichungen wie 5.1, in denen nur sachklassengebundene Größen vorkommen, normgerecht formuliert. Die in zutreffend formulierten Gesetzesgleichungen stehenden Einfachindizes genügen aber nicht, wenn Bestimmungsgleichungen zu schreiben sind, also Gleichungen, die Beziehungen zwischen einzelsachgebundenen Größen herstellen. Im Falle des Areals eines Dreiecks 1 wären zum Beispiel bei exakter begriffsgemäßer Formulierung die folgenden Doppelindizes zu schreiben:

(6.1) $A(D_1) = 1/2 \cdot l(G_1) \cdot l(H_1)$.

Es ist mir klar, daß man - um der Kürze des Ausdrucks willen - indizierte (und besonders doppelt und dreifach indizierte) Größensymbole vermeiden möchte. Wie schon im nächsten Abschnitt und auch in späteren Abschnitten gezeigt wird, führt die (auch nur teilweise) Verwirklichung des Wunsches, nur indexlose Größenzeichen zu verwenden, zu großen Schwierigkeiten. Wichtiger als die Kürze ist für das grundsätzliche Verständnis die Angemessenheit (Adäquatheit, Klarheit) des Ausdrucks.

Im übrigen ist anzumerken, daß die indizierten Größensymbole den Lernenden das Leben nicht erschweren, sondern erheblich erleichtern: Die ausführlichen Symbole bringen das Bezeichnete vollständig zum Ausdruck und besagen damit alles das unmittelbar, was man bei den verkürzten Symbolen selber bedenken müßte, oft aber eben nicht mitbedenkt, in späteren komplizierteren Fällen als Lernender oft gar nicht mitbedenken kann. Selbstverständlich muß ausdrücklich gelernt und geübt werden, wie Verbalausdrücke in Symbole und wie Symbole in Verbalausdrücke umzuformen sind.

6.2. Im Vorstehenden wurden die Betrachtungen auf die meßbaren Eigenschaften als solche eingeschränkt und die mathematische Erfassung der Lagebeziehungen auf den zweiten Teil verwiesen. Das schließt aber nicht aus, daß Lagebeziehungen auch schon vor ihrer mathematischen Behandlung berücksichtigt werden.

An einer isoliert betrachteten Strecke kann man nur eine Länge feststellen, nicht aber - wie schon gesagt - auch eine Lage. Es ist aber kaum möglich, den Begriff der Länge zu explizieren, ohne mehrere Strecken mit bestimmten Orts- und Lagebeziehungen zu betrachten. Da die Explikation nur durch Augenschein (Evidenz) möglich ist, kann man in der folgenden Weise vorgehen. Man zeichnet in der bekannten Weise zwei Scharen jeweils gleich langer Strecken senkrecht zu einer Hilfsgeraden (Bild 6.4) und legt fest: Länge ist diejenige Eigenschaft, die allen Strecken A_i gemeinsam ist und die allen Strecken B_i gemeinsam ist und die bei den Strecken A_i anders ist als bei den Strecken B_i.

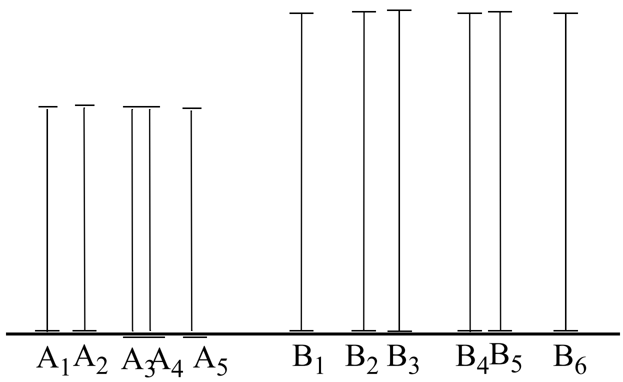

Bild 6.4. Zur Explikation des Begriffs "Länge"

Diese Explikation setzt - wenn der Augenschein unmittelbar überzeugen soll - voraus, daß die gezeichneten Strecken parallel sind, also zueinander in einer bestimmten Lagebeziehung stehen, und daß sich die Orte der Streckenfußpunkte auf einer Geraden befinden, auf der die Strecken senkrecht stehen. Diese Strecken in ihren bestimmten Lagen und Orten zu zeichnen, ist möglich, ohne Lagebeziehungen schon mathematisch zu behandeln. Wir können deshalb - wie geplant - vorläufig allein bei der Besprechung von Längen und anderen Ausmaßeigenschaften bleiben.

6.3. Es ist offenbar nicht möglich, die Begriffe "lang sein" und "gleich lang sein" beziehungsweise "eine Länge haben" und "gleiche Längen haben" unabhängig voneinander einzuführen. In das Bild 6.4 ist auch der Begriff des Gleich-lang-Seins schon hineingesteckt. Der Begriff "gleich lang" (das Bezogensein "gleich lang sein"; die Relation "die gleiche Länge haben") ist aber noch so zu beschreiben, daß mit ihm auch gearbeitet werden kann. Zwei Linienstücke (Strecken, Streckenzüge, Kurvenstücke) sind gleich lang, wenn sie zur Deckung gebracht werden können (Bild 6.5).

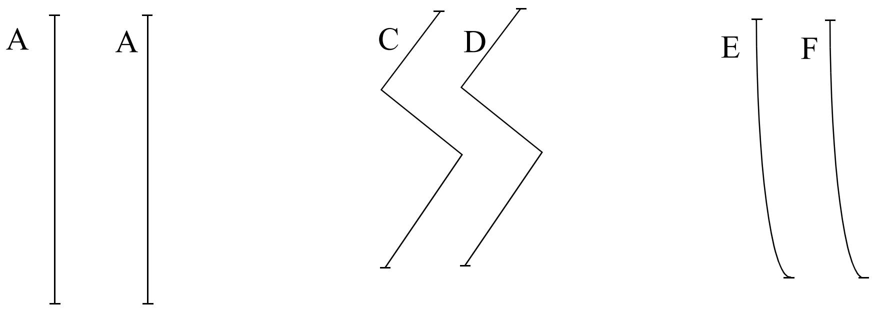

Bild 6.5. Die Strecken A und B, die Streckenzüge C und D und die Kurvenstücke E und F sind jeweils gleich lang, wenn sie zur Deckung gebracht werden können.

Hinsichtlich der Messung und Berechnung von Längen sind noch die folgenden Festlegungen erforderlich.

(1) Ein Streckenzug C ist gleich lang wie eine Strecke A, wenn die Strecke C', die aus ihm durch Geradebiegen («Rektifizieren») gebildet wird, mit der Strecke A zur Deckung gebracht werden kann (Bild 6.6). - "Rektifizieren eines Streckenzuges" heißt, dessen Teilstücke so um deren jeweilige Anfangspunkte drehen, daß alle Teilstrecken in die gleiche Lage kommen und damit eine (nicht geknickte) Strecke bilden.

(2) Eine gekrümmte Linie begrenzter Länge E ist gleich lang wie eine Strecke B, wenn die Strecke E', die aus ihr durch Rektifizieren gebildet wird, mit der Strecke B zur Deckung gebracht werden kann (Bild 6.7). Das Rektifizieren könnte im dinglichen Bereich durch das tatsächliche Geradebiegen zum Beispiel eines Drahtstückes erfolgen. (In der Praxis geht man im allgemeinen umgekehrt vor. Man legt zum Beispiel ein biegsames Meßband an das gekrümmte Ding und liest am Meßband die Länge ab - gleichgültig ob dieses vor dem Ablesen wieder geradegerichtet wird oder nicht.)

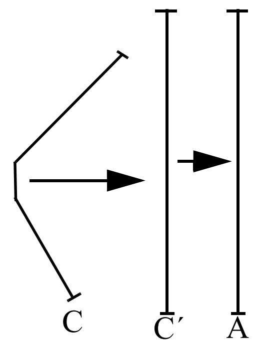

Bild 6.6. Der Streckenzug C und die Gerade A sind gleich lang, wenn der rektifizierte Streckenzug C' mit der Strecke A zur Deckung gebracht werden kam.

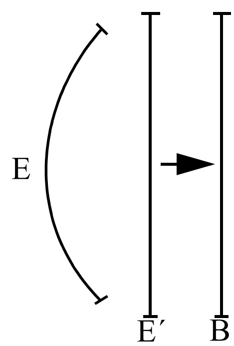

Bild 6.7. Das Kurvenstück E und die Strecke B sind gleich lang, wenn das rektifizierte Kurvenstück E' mit der Strecke B zur Deckung gebracht werden kann.

Bei der (mathematischen) Berechnung der Länge eines (stetig) gekrümmten Linienstücks wird dieses in Gedanken als ein Streckenzug aufgefaßt, dessen (infinitesimale) Teilstücke so kurz sind, daß diese als gerade betrachtet werden können, und dann die Längen dieser Teilstücke addiert («integriert»).

Es ist nicht Aufgabe dieser Arbeit, die der Infinitesimalrechnung zugrunde liegenden Überlegungen vollständig darzustellen. Hier sei nur das Folgende gesagt: Die jeweilige Kurve wird in ein x-y-Koordinatensystem eingebettet und durch eine Gleichung der Art "y = f(x)" beschrieben. Die Länge des Kurvenstücks K zwischen den Punkten A und B der Kurve kann dann mit Hilfe einer Gleichung der Art

(6.2) $$K) = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (f''(x))^2}\, d$$

[a=x(A); b=x(B)]

berechnet werden.

Nach dem Begriff "gleich lang" ist im begrifflichen Aufbau der Physik noch der Begriff "n-mal so lang" festzulegen: Eine Strecke A ist n-mal so lang wie eine Strecke B, wenn sie so lang ist, wie n (auf einer Geraden) lückenlos aneinander liegende Strecken B zusammen sind.