16. Größensysteme

16.1. Das Rechnen mit Urgrößen (und den zugehörigen Verknüpfungskonstanten und Bezugsgrößen eigener Art) ist phänomengerecht, wird aber umso umständlicher und damit umso unübersichtlicher, je mehr Eigenschaften als Urgrößen behandelt werden. Man rechnet deshalb mit einem Kombinat von Urgrößen und Ersatzgrößen und versucht, in Wissenschaft und Technik mit möglichst wenigen Urgrößen und entsprechend vielen Ersatzgrößen auszukommen. Die Urgrößen, mit denen tatsächlich gerechnet wird, und die Ersatzgrößen für die anderen Urgrößen bilden zusammen ein System von Größen. (Ein System ist eine Menge [Gesamtheit] von Elementen, zwischen denen bestimmte Beziehungen bestehen.) Die in ein Größensystem aufgenommenen Urgrößen werden in ihrer Gesamtheit als die "**Basis des Systems**" bezeichnet; die einzelnen Urgrößen werden "**Basisgrößen**" genannt. Die Ersatzgrößen, die mathematische Konstrukte sind, die aus den Basisgrößen gebildet werden, heißen "abgeleitete Größen".

Die Basisgrößen müssen nach der heute fast allgemein vertretenen Auffassung so ausgewählt werden, daß sie voneinander unabhängig sind (das heißt auch: daß sie Urgrößen und nicht unerkannte Ersatzgrößen sind, siehe Abschnitt 18) und daß aus ihnen alle anderen Größen des Systems (also alle Ersatzgrößen) durch Multiplizieren (einschließlich Dividieren) und Potenzieren mit ganzzahligen Exponenten abgeleitet werden können. Die Basisgrößen müssen also - wie der Mathematiker sagt - die Erzeugenden aller abgeleiteten Größen des jeweiligen Größensystems sein.

Da zwischen jeweils bestimmten Größen gesetzmäßige Beziehungen bestehen, ist es möglich, jede Größe mathematisch von anderen Größen abzuleiten:

(16.1.) $A = l^2$; $V = A \bullet l$; $\mathrm{V} = l^3$; $A = V / l$; $l = V / A$

(16.2.) $F = m_{\mathrm{tr}} \bullet a_{\mathrm{G}}$; $m_{\mathrm{tr}} = F / \mathrm{a_G}$; $\mathrm{a_G} = F / m_{\mathrm{tr}}$

Die Gleichung "$l=V/A$" kann als die Definitionsgleichung für die sogenannte Niederschlagshöhe betrachtet werden. Diese ist die Ersatzgröße für die Eigenschaft "Ergiebigkeit eines Niederschlags".

Es ist aber nicht gleichgültig, welche Urgrößen man als Basisgrößen wählt. Die an diese gestellten Forderungen verhindern, daß zum Beispiel als Basisgrößen der Mechanik Länge, Masse und Energie gewählt werden, weil von diesen drei Größen - wie hier ohne Nachweis mitgeteilt sei - nicht alle anderen mechanischen Größen abgeleitet werden können. (Werden Länge, Dauer und Masse oder Länge, Dauer und Kraft oder Länge, Dauer und Energie gewählt, können von diesen alle anderen Größen des mechanischen Dreiersystems abgeleitet werden.) Die Forderung, nur Basisgrößenpotenzen mit ganzzahligen Exponenten zuzulassen, verhindert, daß zum Beispiel das Volumen anstelle der Länge als Basisgröße gewählt wird. Die Länge wäre als abgeleitete Größe die "dritte" Wurzel (also eine nichtganzzahlige Potenz) der Basisgröße "Volumen":

(16.3) $l = V^{1/3}$

Abgeleitete Größen, die Potenzen mit nichtganzzahligen Exponenten sind, gibt es nicht nur in dem von Theoretischen Physikern und Physikochemikern bis heute benutzten elektrostatischen Dreiersystem (siehe Abschnitt 18); sie werden des öfteren - ebenso wie Logarithmen von Größen - auch von Benutzern des heute favorisierten Siebenersystems verwendet, und zwar besonders im Verlauf von Gesetzesableitungen. Mit nichtganzzahligen Potenzen und mit Logarithmen von Größen, die nach traditioneller Auffassung als nicht definiert zu betrachten sind, werden aber durchaus auch Gesetze selbst formuliert, wie zum Beispiel das (im Unterabschnitt 8.1 schon erwähnte) Gesetz für die adiabatische Zustandsänderung:

(16.4) $p \bullet \mathrm{V}^{\mathrm{K}} = \text{konst},$

in dem K als Quotient zweier gleichartiger Größen zum Beispiel die Zahl "1,40" sein kann.

Kienle beschäftigt sich schon seit langer Zeit mit der Frage, ob Potenzen von Größen mit nichtganzzahligen Exponenten und Logarithmen von Größen nicht doch im Größenkalkül zuzulassen seien. Seine Auffassung findet inzwischen größere Aufmerksamkeit.

Die Namen "Urgröße" und "Basisgröße" sind also nicht gleichbedeutend. Basisgrößen gibt es nur wenige, und zwar in verschiedenen Größensystemen verschieden viele, während es so viele Urgrößen wie meßbare Eigenschaften gibt.

16.2. Beim Ableiten von Ersatzgrößen können sich für verschiedenartige Urgrößen gleichartige abgeleitete Größen ergeben. Beispiele hierfür wurden im Vorstehenden schon genannt. Um auf der einen Seite mit möglichst wenigen Basisgrößen arbeiten zu können und auf der anderen Seite die Menge der beim Ableiten auftretenden Mehrdeutigkeiten möglichst klein zu halten, werden die Basisgrößen mit großer Sorgfalt ausgewählt. Ob die jeweilige Wahl zweckmäßig ist oder nicht, ist eine Frage, die immer wieder zu überprüfen ist, insbesondere beim Bekanntwerden neuer Phänomene wie der magnetischen und der elektrischen Erscheinungen und der radioaktiven Strahlung. Die Überprüfungen führten bekanntlich dazu, daß man im Lauf der Zeit von Größensystemen mit drei Basisgrößen bis zum heute favorisierten System mit sieben Basisgrößen übergegangen ist (Länge, Dauer, träge Masse, elektrische Stromstärke, thermodynamische Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke).

Es wird von vielen bezweifelt, daß dieses System unserem heutigen Kenntnisstand gerecht wird. So sind thermodynamische Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke als Basisgrößen durchaus problematisch. Daß viele bedauern, daß ebener Winkel und Raumwinkel nicht als Basisgrößen behandelt werden, wurde schon ausgeführt. Von einigen Wissenschaftlern wird die Einführung weiterer Basisgrößen propagiert. So fordert zum Beispiel Rudolf Fleischmann /6/ mit guten Gründen, die schwere Masse m_s als Basisgröße einer Gravitationsmechanik (siehe Abschnitt 19) und die magnetische Polstärke P als Basisgröße einer Magnetik einzuführen.

Die Anzahl der Basisgrößenmenge wird als Grad des Systems bezeichnet. Demnach ist das, was wir bis jetzt kurz als ein "Dreiersystem" bezeichneten, ein «Größensystem vom Grade 3». Wenn ein Übergang von einem System vom Grade n zu einem System vom Grade $n + 1$ allgemein akzeptiert wird, hat sich - aufgrund eines Erkenntniszuwachses - die Auffassung darüber geändert, welches der günstigste Kompromiß zwischen der Einfachheit und Handhabbarkeit des Kalküls auf der einen Seite und der Vermeidung von Mehrdeutigkeiten auf der anderen Seite ist. Der Übergang erfolgt also nicht aus mathematisch zwingenden Gründen, sondern allein unter dem Gebot der Zweckmäßigkeit. Kommt es uns nur auf die mathematische Beherrschung physikalisch-technischer Probleme an, können wir mit vergleichsweise wenigen Basisgrößen auskommen; geht es uns mehr um das physikalische Verständnis und damit auch um das Im-Blick-Behalten der Phänomene, müssen wir mehr Größen als Basisgrößen behandeln. In jedem Fall aber ermöglicht das pragmatische Element im Umgang mit Größen, zu rekonstruieren, welcher physikalische Sachverhalt gemeint ist, für welche Eigenschaft (Urgröße) eine Ersatzgröße steht, welche phänomenologische Eigenschaft also mit der Ersatzgröße tatsächlich gemeint ist. Für das Verständnis der physikalischen Phänomene ist der (verständniserschließende) Terminus "Ersatzgröße" sehr viel wichtiger als der Name "abgeleitete Größe", der nur größentheoretisch von Belang ist. Er sollte deshalb bevorzugt verwendet werden. Die didaktische Bedeutung zutreffend gewählter Fachwörter kann nicht hoch genug eingeschätzt werden.

16.3. Die Einführung jeder Ersatzgröße, also das Zurückgehen von einem Größensystem mit n Basisgrößen zu einem System mit $(n - 1)$ Basisgrößen (mit dem damit verbundenen Wegfall einer Verknüpfungskonstanten sowie von Einheiten sui generis) erleichtert viele Arbeiten, ja ermöglicht in vielen Fällen überhaupt erst, physikalische Phänomene quantitativ zu untersuchen (siehe Abschnitt 18). Je mehr Eigenschaften Gegenstand naturwissenschaftlicher Forschung werden, desto wichtiger wird die Möglichkeit, abgeleitete Größen als Ersatzgrößen einzuführen. Man darf aber nicht glauben, daß man beim Arbeiten mit Ersatzgrößen, das nicht sorgfältig bewußt gemacht wird, den Schülern die Welt zeigen könne, wie sie ist. In der Welt, die uns phänomenologisch gegeben ist, gibt es nicht nur sieben physikalisch relevante Eigenschaften. Wenn die abgeleiteten Größen, die samt und sonders mathematische Konstrukte sind, nicht sorgfältig genug eingeführt werden, verstellen sie den Blick auf die tatsächlich interessierenden Eigenschaften (Urgrößen) und verfremden auf diese Weise den Schülern die Natur. Während die Lernenden erwarten, daß im naturwissenschaftlichen Unterricht über die Natur, also über die Sachen und Sachverhalte, geredet wird, wird - wie wir schon von früher her wissen - tatsächlich über weite Strecken nicht von den Sachen gehandelt, sondern von Relationen zwischen Eigenschaften von Sachen. **Und selbst das heute bei nur sieben Eigenschaften**. In den anderen, weit überwiegenden Fällen wird mit Relationen zwischen Ersatzgrößen für Eigenschaften gerechnet, so daß - wie inzwischen zusätzlich klar ist - die eigentlichen Eigenschaften nur unzulänglich oder überhaupt nicht in den Blick kommen. (Bei dieser Aussage ist zu bedenken, daß die Physik auch Größen behandelt, die der Anschauung viel weniger zugänglich sind als die bis jetzt allein betrachteten geometrischen und mechanischen.)

Unter diesen Umständen ist es wohl nicht zweifelhaft, daß der traditionelle Unterricht mit dazu beiträgt, daß sich bei vielen Schülern eine Abneigung gegen diesen Unterricht und auch gegen die Naturwissenschaften selbst entwickelt. Es gibt - wie die Erfahrung zeigt - durchaus Schüler, denen der traditionelle Unterricht genügt und die insbesondere schon zufrieden sind, wenn sie Namen und Symbole kennen und wenn sie gelernt haben, was diese bedeuten sollen. Aus diesen Schülern rekrutieren sich die späteren Mathematiker und Physiker. Es gibt aber auch viele Schüler, denen das nicht genügt, die unbefriedigt bleiben und denen wir helfen sollten. Wenn das gelingt, ist zu hoffen, daß die ursprünglich positive Einstellung der Schüler zum naturwissenschaftlichen Unterricht besser als bisher erhalten bleibt und daß dann das von Charles Percy Snow beschriebene Auseinanderfallen der Menschheit in zwei «Kulturen» gebremst wird.

Zum Schluß dieses Abschnitts ist das Folgende noch einmal zu betonen. - Es steht außer Frage, daß nicht alle Eigenschaften im Kalkül als Größen sui generis behandelt werden können: Der Kalkül wäre nicht zu handhaben. Man behandelt deshalb nur wenige Eigenschaften als Urgrößen und bezeichnet diese als die Basisgrößen des jeweiligen Systems. Alle anderen Eigenschaften werden durch mathematische Konstrukte ersetzt, die aus diesen Basisgrößen gebildet werden. Wir arbeiten also nicht ausschließlich mit Größen, die tatsächliche Eigenschaften sind, sondern (heute) nur mit sieben solcher Größen und mit mathematischen Konstrukten, die sich bei der Gesetzessuche als Ersatzgrößen für die tatsächlichen Eigenschaften anbieten. Die Eigenschaften, an deren Stelle im Kalkül Ersatzgrößen verwendet werden, kommen als solche allenfalls in einführenden Anmerkungen in das Blickfeld.
Durch die Einführung der Ersatzgrößen wird die Syntaktik, das heißt: das Erfassen der Beziehungen der Zeichen zueinander, also der Größenkalkül, erheblich vereinfacht. Im Gegensatz dazu wird die Semantik, das Erfassen der Beziehungen zwischen den Zeichen einerseits und deren Bedeutung andererseits, also die Interpretation der in die syntaktische Maschine eingegebenen und der von dieser Maschine ausgegebenen Zeichen, komplizierter. Eben deshalb besteht eine der wichtigsten Aufgaben der Größenlehre darin, die zweckmäßigste Menge der Basisgrößen zu finden. Und die große Leistung des Größenkalküls besteht nicht nur darin, daß er rechtfertigt, (nicht nur mit Zahlen, sondern auch) mit physikalischen Größen zu rechnen; sie besteht vor allem darin, daß er ermöglicht, für alle Urgrößen, die nicht als Basisgrößen behandelt werden (können), Ersatzgrößen zu konstruieren, die die mathematische Behandlung der meisten physikalischen und technischen Probleme und Aufgaben überhaupt erst ermöglichen.