15. Geschwindigkeit, Kraft, Arbeit und Drehmoment

Nach diesem Einblick in die Winkelprobleme der Rotationsmechanik und der Strahlungsphysik kehren wir zur Betrachtung bekannterer Größen zurück. - Wegen der Anschaulichkeit des Areals, des Volumens und des ebenen Winkels kommt es im Geometrieunterricht zu keinen größeren Schwierigkeiten. Da uns die Schüler bei den geometrischen Größen abnehmen, was wir ihnen erzählen, meinen sie, uns auch die entsprechenden Aussagen über andere Größen glauben zu müssen, obwohl sie bei diesen zunehmend weniger verstehen, um was es sich eigentlich handelt. - Das soll zunächst an vier Größen der Mechanik erläutert werden.

15.1. Die erste dieser Größen ist die Geschwindigkeit, mit der eine Translationsbewegung erfolgt. Sie wird - wie üblich - bei der Untersuchung einer Translationsbewegung eingeführt, die mit gleichbleibender (konstanter, ˙gleichförmiger˙ Geschwindigkeit abläuft. - Bevor ich darauf näher eingehe, mache ich eine didaktische und eine sprachliche Anmerkung.

(1) Es ist didaktisch mißlich, den Blick der Schüler von Anfang an ausschließlich auf die Translationsgeschwindigkeit zu richten: Diese wird dadurch für längere Zeit zur Geschwindigkeit schlechthin und läßt andere Geschwindigkeiten nicht in das Blickfeld der Schüler treten. Soll das vermieden und damit zugleich erreicht werden, daß die Schüler von Anfang an wissen, von welcher Geschwindigkeit geredet wird, sollten zu Beginn des hier in Rede stehenden Unterrichtsabschnitts zunächst verschiedene Geschwindigkeiten phänomenologisch betrachtet werden - mindestens die Translations- und die Rotationsgeschwindigkeit, nach Möglichkeit aber zum Beispiel auch die Erwärmungsgeschwindigkeit, die Verdunstungsgeschwindigkeit, die Arbeitsgeschwindigkeit (Leistung) und (wenn das der Chemieunterricht schon ermöglicht) die Reaktionsgeschwindigkeit. Wenn die Translationsgeschwindigkeit erst dann eingehend und quantitativ behandelt wird, ist die Art der Geschwindigkeit (eben die Translationsgeschwindigkeit) von Anfang an bewals geeigneten Namen ußt, und bleibt der Blick der Schüler offen für andere Geschwindigkeiten.

(2) Das Wort "Translationsbewegung" ist für den einführenden Unterricht wenig geeignet. Der im Deutschen auch verwendete Name "fortschreitende Bewegung" ist fast noch weniger brauchbar: Wie schreitet eine Bewegung fort? Vor allem läßt er wichtige Wortbildungen nicht zu. Welches ˙griffige˙ deutsche, dem Wort "Translationsgeschwindigkeit" entsprechende Wort könnte man vom Ausdruck "fortschreitende Bewegung" ableiten? Der Ausdruck "Geschwindigkeit einer fortschreitenden Bewegung" (oder gar "fortschreitende Bewegungsgeschwindigkeit") wäre nicht das gesuchte Wort.

Ein geeigneter Name, der auch von den Schülern sofort angenommen wird, ist - neben den Wörtern "Verschiebungsbewegung" und "Laufbewegung" («Durchlaufsinn», «Umlaufsinn») - der Name "**Gleitbewegung**". Den Schülern, die Aussagen wie "Das Unterseeboot gleitet durch das Wasser" und Ausdrücke wie "Raumgleiter" kennen, fällt es nicht schwer, sich von der Vorstellung eines Gleitens auf fester Unterlage zu lösen und das Wort "Gleiten" in einer allgemeineren Bedeutung zu gebrauchen, nämlich als Namen einer Bewegung, bei der sich die Elemente eines Dinges auf gleich langen Bahnen bewegen, die gegeneinander verschoben sind (Bild 15.1) und folglich (durch Verschieben) zur Deckung gebracht werden können. (Bei einer Drehbewegung bewegen sich die Dingelemente auf verschieden großen, konzentrischen Kreisen [Bild 15.2], also auf Bahnen, die nicht zur Deckung gebracht werden können.)

Das Wort "Gleitbewegung" erlaubt, sprachlich treffend und deshalb auch völlig zwanglos von Gleitgeschwindigkeit, Gleitweg, Gleitdauer, Gleitbeschleunigung und Gleitrichtung zu sprechen, also genau so zwanglos, wie wir von Drehgeschwindigkeit, Drehwinkel, Drehdauer, Drehbeschleunigung und Drehrichtung sprechen. - Werden die Zeichen "Gleitbewegung G" und "Gleitgeschwindigkeit v_G" benutzt, ist und bleibt bewußt, von welcher Geschwindigkeit gesprochen wird.

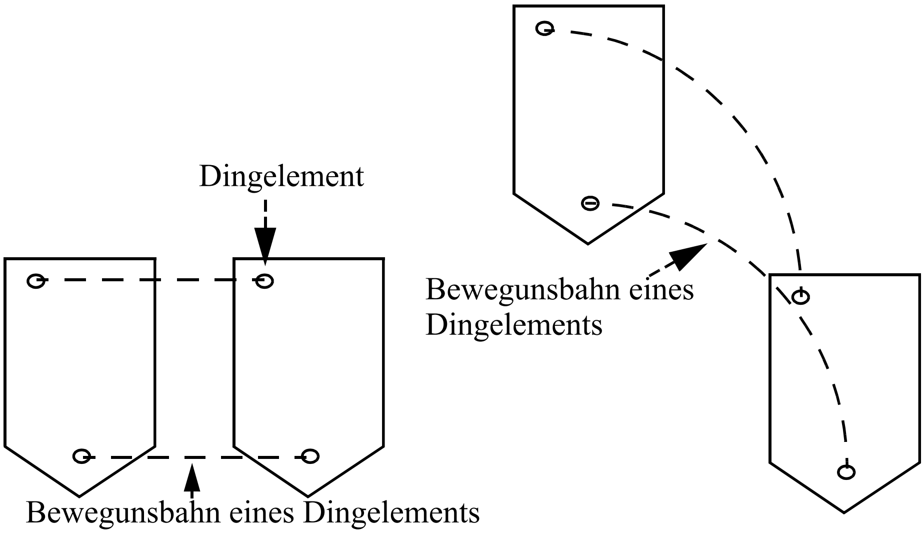

Bild 15.1. Bewegungsbahnen der Elemente eines Dinges bei einer Gleitbewegung auf einer geraden Bahn (1) und auf einer kreisförmigen Bahn (2). - Bei der Gleitbewegung des Dinges auf einer geraden Bahn bewegen sich die Dingelemente auf gegeneinander verschobenen, gleich langen geraden Strecken. Bei der Gleitbewegung des Dinges auf einer kreisförmigen Bahn bewegen sich die Dingelemente auf gleich langen, gegeneinander verschobenen Kreisbögen.

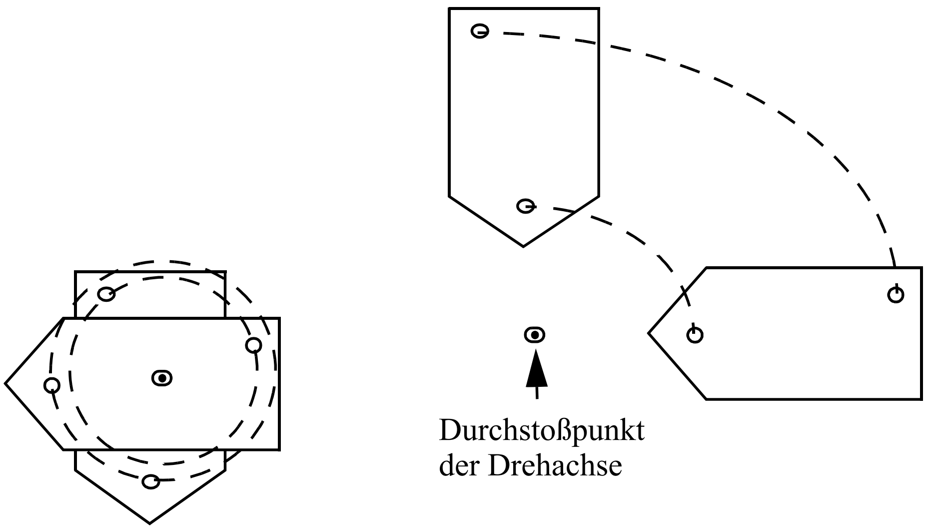

Bild 15.2. Bewegungsbahnen der Elemente eines Dinges bei einer Drehbewegung um eine innerhalb des Dinges liegende Drehachse (1) und um eine außerhalb des Dinges liegende Drehachse (2). - Bei der Drehbewegung eines Dinges bewegen sich die Dingelemente auf verschieden langen, konzentrisch angeordneten Kreisbögen, und zwar gleichgültig ob die Drehachse innerhalb oder außerhalb des Dinges liegt.

Der tiefgestellte und nicht in Klammern stehende Index "G" im Symbol "v_G" weist nicht auf eine Sachbindung hin (was erst ein Klammerzusatz wie in den Symbolen "$v_G(D)$" oder "$v_G(D_l)$ machen würde), sondern bringt zum Ausdruck, daß die so bezeichnete Geschwindigkeit eine Größe eigener Art ist. Die Gleitgeschwindigkeit ist eine Größe anderer Art als zum Beispiel die Drehgeschwindigkeit oder die Reaktionsgeschwindigkeit. - Nach gültigen Nomenklaturregeln sollten den verschiedenartigen Größen, die alle unter dem Namen "Geschwindigkeit" zusammengefaßt werden, verschiedene Symbole zugeordnet sein. - Der Gebrauch des Obernamens "Geschwindigkeit" ist insofern gerechtfertigt, als alle so bezeichneten Größen Quotientengrößen sind, in deren Nenner eine Vorgangsdauer steht.

Damit kehre ich zum Hauptgedankengang zurück. - Den Schülern wird im allgemeinen gesagt, daß sich die (konstante) Geschwindigkeit proportional mit dem «Weg» und umgekehrt proportional mit der «Zeit» ändere (oder gar, daß «Geschwindigkeit gleich Weg durch Zeit» sei). Man nimmt also unausgesprochen - aber durchaus zu Recht - an, daß die Schüler mit dem Wort "Geschwindigkeit" eine zutreffende Vorstellung verbinden können; andernfalls könnte man ja - bei dem in den Naturwissenschaften gebotenen empirischen Vorgehen - nicht feststellen und damit auch nicht sagen, daß sich die Geschwindigkeit proportional mit dem Quotienten aus «Weg durch Zeit» ändere.

Um die in Rede stehende Proportionalität feststellen zu können, muß geklärt sein, was man sich unter "Gleitgeschwindigkeit" vorzustellen hat, muß man sich eine Gleitbewegung überlegen, die mit gleichbleibender Gleitgeschwindigkeit abläuft, diesen Vorgang realisieren, die Urgröße "Gleitgeschwindigkeit v_G^+", die Gleitweglänge l(G) und die Gleitdauer t(G) dieses Vorgangs messen und die gemessenen Größen zur Auffindung einer Gesetzmäßigkeit auswerten. Würden wir die Gleitgeschwindigkeit tatsächlich als Urgröße v_G^+ messen und Gleitversuche mit verschieden großen, aber jeweils konstanten Gleitgeschwindigkeiten durchführen, fänden wir empirisch die folgende naturgesetzliche Proportionalität:

15.1 $\quad v_G^+ = k_6\, l(G) / (t(G)$

Die Eigenschaft "Gleitgeschwindigkeit v_G^+" wird tatsächlich wohl nie als eine Größe sui generis besprochen. An ihrer Stelle wird sofort - den Schülern (und nicht nur diesen) unbewußt - die Gleitgeschwindigkeitsersatzgröße v_G eingeführt:

(15.2) $\quad v_G = 1 / k_6\, v_G^+ = l(G) / (t(G)$

Eine Umformung ergibt:

(15.3) $\quad v_G^+ = k_6\, v_G$

Das besagt: Die phänomenologische Gleitgeschwindigkeit v_G^+ ändert sich proportional mit dem mathematischen Konstrukt "Gleitgeschwindigkeitsersatzgröße $v_G = l(G) / t(G)$"; es ändert sich aber nicht die üblicherweise ebenfalls als "Geschwindigkeit" bezeichnete Ersatzgröße mit dem Quotienten "$l(G) / t(G)$"; sie ist dieser Quotient.
Wir brauchen uns deshalb nicht zu wundern, wenn die Schüler, die bei Beginn des Kinematik-Unterrichts beim Wort "Geschwindigkeit" an eine tatsächliche Eigenschaft der Gleitbewegung denken, nicht verstehen, daß die Größe "$v_G = l(G) / t(G)$", deren 'Natur' als mathematisches Konstrukt erst durch 15.2 aufgedeckt wird, die Geschwindigkeit in der von ihnen gemeinten Bedeutung sein soll. Bei einer erfolgversprechenden Unterrichtsführung ist zuerst zu erkunden, welche Wörter die Schüler gebrauchen und welche Vorstellungen sie diesen zuordnen, sind also die Schüler bei deren Vorstellungen und deren Wortgebrauch 'abzuholen' und behutsam zu den wissenschaftlichen Begriffen und Fachwörtern hinzuführen. Dabei ist sorgfältig darauf zu achten, ob die in der Wissenschafts- und in der Unterrichtssprache gebrauchten Namen und Aussagen nicht unzutreffende Vorstellungen suggerieren oder sogar unverständlich sind, wie zum Beispiel die Aussage, daß die «Geschwindigkeit», unter der sich die Schüler die Urgröße vor-

stellen, gleich «Weg durch Zeit» sei. (Diese Aussage bereitet den Schülern auch dann Schwierigkeiten, wenn diese im Unterricht nicht bemerkt werden sollten.) In solchen Fällen sind neue Termini einzuführen und neue Aussagen zu formulieren - wie eben die Aussagen, daß die rein mathematische eingeführte Größe "v_G" der Quotient "l(G) / (t(G" ist, daß sich die Urgröße "Gleitgeschwindigkeit v_G^+", also die tatsächliche Eigenschaft der Gleitbewegung, und der Quotient v_G proportional miteinander ändern und daß deshalb v_G als Maß und damit auch als Ersatzgröße für v_G^+ verwendet werden kann.

Es sei noch angemerkt, daß die (in üblicher Weise geschriebene) Gleichung "v = *s/t*" nur für die hier allein betrachtete konstante Gleitgeschwindigkeit gilt. Ist die Gleitgeschwindigkeit nicht konstant, ist die Gleichung "$v_0 = dl(G)/dt(G)$" zu verwenden.

Die Proportionalität zwischen v_G^+ und $v_G = l(G) / t(G)$ ermöglicht, auf eine Messung der Gleitgeschwindigkeit v_G^+ zu verzichten. Wird mit der Gleitgeschwindigkeitsersatzgröße v_G gearbeitet und wird anstelle einer Gleitgeschwindigkeitseinheit sui generis das dieser proportionale Konstrukt "1 Meter durch Sekunde" (1 m/s) verwendet, fällt auch das Rechnen mit der Verknüpfungskonstanten k_6 fort. Das Arbeiten mit nur drei Größen [v_G, l(G) und t(G)] statt mit vier [v_G^+, k_6, l(G) und t(G)] erleichtert das praktische Arbeiten erheblich und wird deshalb ausschließlich angewendet. Es sollte aber zutreffend bewußt gemacht werden.

Die Ersatzgröße "Gleitgeschwindigkeit v_G" ist eine Quotientengröße und nicht eine Produktgröße, wie es die Ersatzgrößen für Areal und Volumen sind. - Die Quotientengrößen scheinen den Urgrößen leichter zuzuordnen zu sein als die Produktgrößen. Die Umschreibung der «Geschwindigkeit» als "Länge l(G) des während der Gleitdauer t(G) zurückgelegten Gleitweges" ist mit der Vorstellung der Urgröße "Gleitgeschwindigkeit" in der Tat recht eng verbunden, so daß sich die Schüler mit weniger innerem Widerstand daran gewöhnen können, diese Umschreibung für die Definition der Geschwindigkeit (und nicht der Geschwindigkeitsersatzgröße) zu halten. Diese Umschreibung wird aber auch durch eine solche Gewöhnung nicht zu einer Beschreibung der tatsächlichen (und von den Schülern auch gemeinten) Eigenschaft der Gleitbewegung, sondern bleibt die nähere Kennzeichnung einer Länge, und zwar eben der Länge l(G) des während der Gleitdauer t(G) zurückgelegten Gleitweges.

Die Gleichung "$v_G = l(G)/t(G)$" ist - wie jede Gleichung ohne Gesetzeskonstante - kein Naturgesetz, sondern eine Definitionsgleichung. So ist die sich aus ihr ergebende Gleichung

(15.4) $\quad l(G) = v_G \bullet t(G)$,

in Worten: Die Gleitweglänge ändert sich proportional mit der Gleitdauer (wobei die Gleitgeschwindigkeitsersatzgröße der Proportionalitätsfaktor ist), keine empirisch gefundene Gesetzmäßigkeit, sondern ein logisches Implikat der Definitionsgleichung für die Geschwindigkeitsersatzgröße. Wir haben diese Proportionalität bei der Realisierung der Gleitbewegung, die mit konstanter Gleitgeschwindigkeit erfolgt, schon vorausgesetzt und können sie nicht noch nachträglich als eine naturgesetzliche Beziehung aus den Meßergebnissen ablesen wollen. Erst wenn die Ersatzgröße "v_G" eingeführt und ihre Proportionalität mit der Urgröße "Geschwindigkeit "v_G^+" bei verschieden großen, aber jeweils konstanten Gleitgeschwindigkeiten (mindestens theoretisch) festgestellt ist, kann die Gleichung "$v_G = l(G)/t(G)$" als Ersatzgleichung für ”$v_G + = k_4 \bullet l(G)/t(G)$" betrachtet und in verständlicher Weise als Quasinaturgesetz gehandhabt werden.

Nichtphysiker klagen oft besonders darüber, daß sie mit der Einheit der Beschleunigung (genau: der

Gleitbeschleunigungsersatzgröße; 1 m/s^2 =1 m • s^{-2}) keine klare Vorstellung verbinden könnten und daß sie insbesondere nicht verstünden, was sie sich unter dem «Quadrat» einer Sekunde (1 s^2) vorstellen sollen. Deshalb sei die folgende Anmerkung gemacht. - Die Gleitbeschleunigungsersatzgröße

(15.5) $a_G = v_G / t(G)$

ist ein mathematisches Konstrukt wie die Geschwindigkeitsersatzgröße

(15.6) $v_G = l_G / t(G)$

Wenn diese erst eingeführt ist, ergibt sich die Beschleunigungsersatzgröße mathematisch zwanglos als Doppelquotient.

(15.7) $a_G = v_G / t(G) = \dfrac{\mathrm{l(G) / t(G)}}{\mathrm{t(G)}} = \dfrac{\mathrm{l(G)}}{[\mathrm{t(G)}]^2}$

Wenn sich eine Geschwindigkeit in 1 s um 1 m/s vergrößert, ist die Beschleunigung (1 m/s) /s und das ist - nach den bekannten Regeln der Bruchrechnung - gleich 1 m/s^2 = 1 m • s^{-2}

Mit den (sich bei einfachen mathematischen Operationen ergebenden) Zeichen "1 s^2" beziehungsweise "1 s^{-2}" kann man notwendigerweise keine anschauliche Vorstellung verbinden. Man sollte deshalb auch nicht versuchen, sich unter diesen Zeichen etwas Anschauliches vorzustellen, sondern sich statt dessen der Konstruktnatur dieser Zeichen bewußt sein.

15.2. Als zweite Größe betrachte ich die Kraft und ziehe die sogenannte Grundgleichung der Mechanik heran:

(15.8) Kraft = träge Masse mal Gleitbeschleunigung, $F = m_{tr} \bullet a_G$.

(Üblicherweise wird die träge Masse m_{tr} einfach als "Masse m" bezeichnet und die Gleitbeschleunigung nur mit "a" symbolisiert.)

Die Fachleute streiten sich bis heute, ob diese auch als "2. Newtonsches Axiom" bezeichnete Gleichung ein empirisches Gesetz ist oder eine Definitionsgleichung für die Kraft. - Im Besitz des Begriffs "Ersatzgröße" erkennen wir diese Frage leicht als ein Scheinproblem. Das empirisch-zu findende Gesetz würde lauten:

(15.9) $F^+ = \mathrm{k}_8 \bullet m_{tr}{}^+ \bullet a_G$,

und würde voraussetzen, daß wir nicht nur wissen, was die träge Masse ist, nämlich die Eigenschaft der Dinge, einer Bewegungsänderung einen Widerstand (die sogenannte Trägheitskraft) entgegenzusetzen, was die Kraft ist und was die Gleitbeschleunigung ist und wie man diese Größen als Urgrößen mißt. (Um die Überlegungen verkürzt darstellen zu können, habe ich in 15.9 anstelle der Urgröße "Gleitbeschleunigung aG^+" schon die abgeleitete Gleitbeschleunigungsersatzgröße a_G eingesetzt.) Tatsächlich verzichtet man beim Arbeiten mit dem sogenannten physikalischen Größensystem (mit den Basisgrößen "Länge", "Dauer" und "Masse$^+$") auf die Einführung der Kraft als einer Größe sui generis und auf die Benutzung der Verknüpfungskonstanten k_8 und faßt sofort - bis jetzt offenbar nicht hinreichend bewußt - die Urgröße F^+ und den bei empirischem Vorgehen sich notwendig ergebenden Faktor k_8 mathematisch zusammen:

(15.10) $F^+/\mathrm{k}_8 = m_{tr}{}^+ \bullet a_G$

und benutzt dieses mathematische Konstrukt als Kraftersatzgröße F:

(15.11) $F = F^{+}/k_8 = m_{tr}{}^{+} \bullet a_G$ (in traditioneller Schreibweise: $F = m \bullet a$).

Die Gleichung 15.8, in der keine Gesetzeskonstante vorkommt, ist kein empirisches Gesetz, sondern eine Definitionsgleichung, aber nicht eine Definitionsgleichung für die Kraft F^{+}, sondern für die Kraftersatzgröße F (15.11).

Erst wenn diese Ersatzgröße mit der Gleichung 15.11 eingeführt ist, kann man 15.8 als eine Ersatzgleichung für 15.9 betrachten und in verständiger Weise als Quasinaturgesetz handhaben.

Wenn man (wie beim Arbeiten mit dem sogenannten technischen Größensystem mit den Basisgrößen "Länge", "Dauer" und "Kraft^{+}") die Kraft F^{+} als Basisgröße betrachten möchte, kann man den Faktor k_8 mathematisch-formal dadurch zum Verschwinden bringen, daß man diesen mit der Masse $m_{tr}{}^{+}$" zusammenfaßt. Dieses Produkt ändert sich proportional mit der Urgröße "Masse $m_{tr}{}^{+}$" und kann deshalb als Massenersatzgröße $m_{tr}(= k_8 \bullet m_{tr}{}^{+})$ eingeführt werden:

(15.12) $F^{+} = (k_8 \bullet m_{tr}{}^{+}) a_G = m_{tr} \bullet a_G$

Die Definitionsgleichung für diese Massenersatzgröße ergibt sich aus 15.12:

(15.13.) $m_{tr} = F{+} \,/\, a_G$ (in traditioneller Schreibweise: $m = F / a$)

Wenn heute allgemein die Masse (und nicht die Kraft) als Basisgröße behandelt wird, so schließt das nicht aus, daß man im Unterricht aus didaktischen Gründen zunächst die Kraft als Urgröße betrachtet: Diese ist uns im (eigenen) Erleben zugänglich und damit in gewisser Weise 'anschaulich', während die Eigenschaft "Trägheit" („träge Masse") nur aus dem Auftreten von Trägheitskräften bei Beschleunigungsvorgängen (gedanklich) erschlossen werden kann. Wenn man später erkennt, daß es aus praktischen, insbesondere meßtechnischen Gründen zweckmäßiger ist, die Masse als Basisgröße zu behandeln, kann man problemlos vom technischen zum physikalischen Größensystem übergehen.

Wenn ein Schüler eine Kugel stößt, so daß diese eine Gleitbeschleunigung erfährt, kann er nach einigem Überlegen sicherlich verstehen, daß das Produkt aus der Masse der Kugel und der Gleitbeschleunigung, die die Kugel erfährt, ein Maß für die Kraft ist, mit der er beim Stoßen auf die Kugel einwirkt. Aber ebenso sicher kann er nicht verstehen, daß das Produkt zweier Größen, die ausschließlich die Kugel betreffen (eben deren Masse und die Gleitbeschleunigung, die diese erfährt), die Kraft sein soll, mit der er - der Schüler - auf die Kugel einwirkt und die er erlebt, oder daß dieses Produkt die Kraft sein soll, die er als Widerstand der Kugel gegen seine beschleunigende Hand ebenfalls erlebt. Die Kraft ist etwas, was mit der wechselseitigen Einwirkung zweier (oder mehrerer) Sachen zu tun hat (als stoßende Sache könnte bei einem Stoßversuch auch eine gespannte Feder fungieren), und nicht das (allein aus Größen des beschleunigten Dinges berechnete) Masse-Gleitbeschleunigungs-Produkt. In einem allgemeinbildenden Physikunterricht sollte nicht nur angestrebt werden, daß die Schüler möglichst schnell mit diesem Produkt (bei der Berechnung von Aufgaben) umgehen können, sondern auch und vor allem, daß sie in den Griff bekommen, welche Vorstellung sie mit dem Wort "Kraft" verbinden sollen. Hinsichtlich der phänomenologischen Definition der Kraft hat der Unterricht mehr zu leisten, als im Rahmen dieser Untersuchung dargestellt werden kann. Es ist sicher, daß gerade die Einlösung dieser Bringschuld wesentlich dafür wäre, die wahrnehmbare, die uns im Erleben gegebene Welt zutreffend deuten und damit verständlich machen zu können.

15.3. Als dritte und vierte Größe wähle ich Arbeit und Drehmoment, weil bei deren (nochmaliger) Besprechung ein wichtiges Problem zu klären ist und dabei die am Ende des Abschnitts 8 offen gelassene Frage eine Antwort findet. - Auch diese beiden Größen sind - wie alle abgeleiteten Größen - Ersatzgrößen. Die früher verwendeten Gleichungen "$W = F \bullet l(S)$" und „$M = F \bullet l(A)$" enthalten keine Gesetzeskonstanten und sind deshalb auch keine Naturgesetze, sondern Definitionsgleichungen. Sie definieren aber - wie vorstehend schon zum Ausdruck gebracht - nicht die eigentlich gemeinten Urgrößen, sondern deren Ersatzgrößen. Die gemeinten Urgrößen ändern sich proportional mit der Kraft und proportional mit der Weg-beziehungsweise Hebelarmlänge und sind deshalb mit diesen Größen durch einen Verknüpfungsfaktor verbunden:

(15.14) $W^+ = k_9 \bullet F \bullet l(S)$,

(15.15) $M^+ = k_{10} \bullet F \bullet l(A)$.

Die am Ende des Abschnitts 8 erwähnte irritierende Schlußkette

(15.16) $W_1 = 3\ \mathrm{Nm} \wedge M_1 = 3\ \mathrm{Nm} \dashrightarrow W_1 = M_1 \dashrightarrow W{=}M$

ist völlig korrekt. Die Überwindung der Irritation ist deshalb bei den Prämissen zu suchen und jetzt auch leicht zu finden: Die Symbole "W" und "M" sind - wie wir jetzt wissen - nicht Zeichen für die Urgrößen "Arbeit W^+" und "Drehmoment M^+", sondern Zeichen für die Arbeitsersatzgröße,

(15.17) $W = W^+/k_9 = F \bullet l(S)$

und für die Drehmomentenersatzgröße,

(15.18) $M = M^+/k_{10} = F \bullet l(A)$,

und sind damit - wenn wir nur die Art der Größen betrachten und folglich von deren Ausmaß und damit auch von deren Sachbindung und deren Lagebeziehung absehen - **zwei verschiedene Zeichen für ein und dieselbe Ersatzgröße,** nämlich für das Kraft-Länge-Produkt "$F \bullet l$". Mit dem Wegfall des Hinweises auf die unterschiedlichen Lagebeziehungen ist die Zuordnung dieses Produktes zu den Größen "Arbeit" und "Drehmoment" nicht mehr eindeutig: Dieses mit sich selbst identische Produkt ist Ersatzgröße sowohl für die Arbeit wie für das Drehmoment:

(15.19) $W = F \bullet l$.

(15.20) $M = F \bullet l$.

Auf entsprechende Weise wird auch die Mehrdeutigkeit anderer Ersatzgrößen bedingt, wie zum Beispiel die Mehrdeutigkeit der für mehrere, schon früher genannte Größen verwendeten Dreimalpotenz der Länge "l^3".

Der Schluß 15.16 besagt also: Wenn die Arbeitsersatzgröße 3 Nm ist und wenn die Drehmomentenersatzgröße 3 Nm ist, sind die Arbeitsersatzgröße und die Drehmomentenersatzgröße gleich groß. Und wenn wir das Ausmaß der Ersatzgrößen außer Betracht lassen, besagt der Schluß: Die Arbeitsersatzgröße W ist (identisch) gleich der Drehmomentenersatzgröße M. Gegen diese beiden Schlüsse ist nichts einzuwenden.

Es sei an dieser Stelle die sprachliche Anmerkung gemacht, daß die Buchstaben "-en-" im Wort "Drehmomentenersatzgröße" nicht eine Pluralendung, sondern - ebenso wie der Buchstabe "-s-" im Wort "Arbeitsersatzgröße" - eine (veraltete) Endung des Singulargenetivs ist. Man vergleiche hierzu Wörter wie

"Längenausmaß".

Der Schluß 15.16 besagt also (bei zutreffender Interpretation der Größensymbole) nicht, daß zwei verschiedenartige Größen einander gleich seien, sondern erinnert daran, daß wir für zwei verschiedenartige Größen (auf die die unterschiedlichen Zeichen "Arbeit W" und "Drehmoment M" hinweisen) ein und dieselbe Ersatzgröße verwenden. Unkorrekt ist also - wie schon gesagt - nicht der Schluß 15.16, sondern die Interpretation, daß die Zeichen "Arbeit W" und "Drehmoment M" Zeichen für die Urgrößen "Arbeit W^+" beziehungsweise "Drehmoment M^+" (Betrag des Drehmoments M^+) seien. Zutreffend ist zu sagen, daß diese unterschiedlichen Zeichen für das Kraft-Länge-Produkt signalisieren, daß mit diesem Produkt einmal eine Arbeitsersatzgröße und einmal eine Drehmomentenersatzgröße gemeint ist.

Daß diese Ersatzgrößen traditionell einfach als "Arbeit W" und "Drehmoment M" bezeichnet werden, ist durch die Kürze des Ausdrucks nur zu begründen, aber nicht zu rechtfertigen. Der durch diese Verkürzung bedingte Verstoß gegen die Logik ist kein folgenloser Schönheitsfehler; er bedingt Irritationen, die nicht nur jede Schülergeneration aufs Neue bedrängen, sondern auch Fachleute beschäftigen, die noch ein Gespür für solche Unkorrektheiten haben. Sollen die Schüler mit physikalischen Größen verständig umgehen können, genügt es nicht, irgendwann einmal zu erwähnen, daß abgeleitete Größen Ersatzgrößen sind; es ist dann vielmehr erforderlich, die Ersatzgrößen auch konsequent als solche zu behandeln: Es ist -wie schon früher gesagt - nicht das Areal (die Flächenbedeckung) eines Dreiecks 15 cm^2, sondern die Arealersatzgröße; und es ist nicht eine Arbeit 15 Nm, sondern eine Arbeitsersatzgröße. Namen wie "Arbeitsersatzgröße" weisen zum einen unmißverständlich auf die eigentlich gemeinte Urgröße hin und besagen zum andern, daß die Ersatzgröße nicht selbst diese Urgröße ist, sondern ein mathematisches Konstrukt, das sich gesetzmäßig mit der Urgröße ändert und deshalb als ein Maß für diese verwendet wird.

Wenn in der Praxis der Wortteil "-ersatzgröße" unterschlagen wird, ist es umso dringender geboten, sorgfältig bewußt zu machen und im Gedächtnis hinreichend fest zu verankern, daß außer den Basisgrößen, die allein physikalisch-phänomenologische Eigenschaften sind, alle anderen Größen abgeleitete und damit nur mathematisch konstruierte Ersatzgrößen sind. Es sollte aber nicht fraglich sein, daß die Verwendung angemessener (adäquater) Begriffsbezeichnungen („Areal" und "Arealersatzgröße" oder "Arbeit" und "Arbeitsersatzgröße") nicht nur Winkelzüge überflüssig macht, sondern aus Gründen der methodologischen Klarheit und des verständigen Umgehens mit Größen grundsätzlich zu bevorzugen ist.

Es sei noch daran erinnert, daß nicht nur Arbeit und Drehmoment, sondern auch Biegemoment und Torsionsmoment durch das Produkt "Kraft mal Länge" ersetzt werden und daß - um auch das noch einmal zu erwähnen - nicht nur das Volumen, sondern auch das Flächenmoment 1. Grades und das Widerstandsmoment durch die Dreimalpotenz der Länge ersetzt werden.

Das Ableiten der abgeleiteten Größen von vergleichsweise wenigen Basisgrößen bedingt notwendig, daß Ersatzgrößen für verschiedenartige Urgrößen gleich sein können und zum Teil auch gleich sein müssen. Das hat zur Konsequenz, daß der Größenkalkül nur 'trennscharf' bis zu den Basisgrößen und den Ersatzgrößen ist, aber nicht trennscharf bis zu allen Eigenschaften sui generis. (Diese Aussage ersetzt die gelegentlich zu lesende, aber nicht ebenso unmittelbar verständliche Aussage, daß der Größenkalkül nur trennscharf bis zu den «Dimensionen» sei.) Es ist deshalb aus zwingendem Grund nicht zu erkennen, ob zum Beispiel das Produkt "3 Nm" für eine Arbeitsersatzgröße, für eine Drehmomentenersatzgröße oder für eine andere Ersatzgröße der gleichen Art steht. Das ist nur dann zu erkennen, wenn die bezugsgrößengebundene Angabe (3 Nm) in einer Gleichung mit einem der pragmatisch verwendeten Symbole (W_1) gleichgesetzt ist („$W_1 = 3$ Nm"). Das unterstreicht noch einmal, wie wichtig es ist, nicht einfach Größensymbole, sondern grundsätzlich Größengleichungen zu schreiben und in diesen die Sachbindung der Größen korrekt durch Indizes zu kennzeichnen.