14. Ebener Winkel und räumlicher Winkel. Reelle Zahlen als Ersatzgrößen. Die Winkel als Urgrößen und als Ersatzgrößen. Größen der Rotationsmechanik und der Strahlungsphysik

14.1. Der ebene Winkel ist eine Eigenschaft, die ebenso problemlos wie die Länge als Urgröße gemessen werden kann. Er kann phänomenologisch als die Spreizweite p eines Schenkelpaares (mit gemeinsamem Scheitel), also eines Zweibeins oder Dipoden bezeichnet werden. Das Zweibein kann als für sich allein bestehend oder als Begrenzungslinie eines Zwickels betrachtet werden (Bild 14.1).

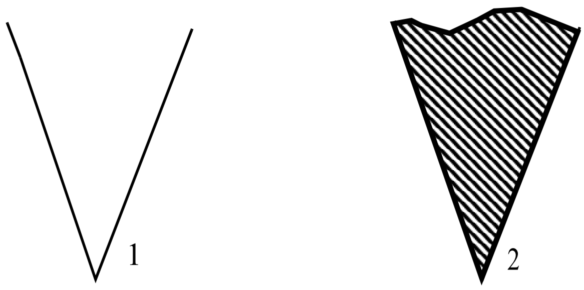

Bild 14.1. Ein Zweibein ist ein Schenkelpaar mit gemeinsamem Scheitel (1). Ein Zwickel ist das von einem Zweibein eingeschlossene Flächenstück (2).

Ich verwende den als Fachwort wohl ungewohnten Namen "Spreizweite", das von alltagssprachlichen Ausdrücken („die Beine spreizen") her geläufig ist, um das gelegentlich gebrauchte Wort "Öffnungsweite" frei zu haben zur Umschreibung des sogenannten Raumwinkels (siehe Unterabschnitt 14.6).
Das geometrische Gebilde "Zweibein", das eine Sache ist und im allgemeinen als "Winkel" bezeichnet wird, und seine meßbare Eigenschaft "Spreizweite", die ebenfalls als "Winkel" bezeichnet wird, sind terminologisch zu unterscheiden. Ich gebrauche deshalb im Folgenden das Wort "Winkel" nur in der Bedeutung "Spreizweite".

Die Spreizweite kann zum Beispiel durch Auslegen des von den Zweibeinschenkeln eingeschlossenen Zwickels mit Winkelmeßplatten gemessen werden (Bild 14.2).

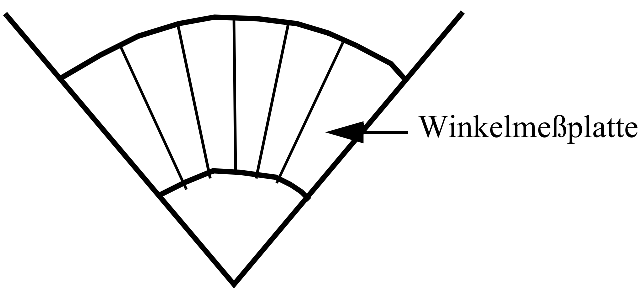

Bild 14.2. (Fingiertes) Auslegen eines Zwickels mit Winkelmeßplatten zur Bestimmung der Spreizweite φ+, zwischen den Zwickelschenkeln. - Es wäre nicht möglich, Meßplatten zu verwenden, die bis in die Zwickelspitze reichen, da die Platten an den Spitzen nicht beliebig weit 'ausgedünnt' werden können. Praktikable Meßplatten, die nicht bis in die Zwickelspitze reichen, müßten beim Messen von dieser genau gleich weit entfernt sein.

Bei den üblichen Winkelmessungen benutzt man nicht einen Satz von Winkelmeßplatten, sondern ein übliches Winkelmeßgerät, so wie man bei den üblichen Längenmessungen nicht einen Satz von Endmeßstäben benutzt, sondern einen Längenmeßstab oder ein Längenmeßband (Unterabschnitt 5.2).

Bei der Wahl der Bezugsgröße (Einheit) einer Urgröße ist man frei, da bei dieser die Frage der Einheitenkohärenz bedeutungslos ist. Man könnte deshalb als Winkelbezugsgröße zum Beispiel die Spreizweite eines Zweibeins wählen, dessen Schenkel senkrecht aufeinander stehen, also den sogenannten rechten Winkel, oder auch den viermal so großen sogenannten Vollwinkel, also die Spreizweite eines 'Zweibeins', dessen einer Schenkel so weit vom anderen weggedreht ist, daß er mit dem ersten wieder zusammenfällt und damit das 'Zweibein' die gesamte Ebene aufspannt, der "Zwickel" also gewissermaßen zur Ebene 'entartet'. Tatsächlich entschied man sich in der historischen Entwicklung der Geometrie und Astronomie schon sehr früh für keinen dieser beiden Winkel, sondern für den 90. Teil des rechten Winkels beziehungsweise für den (mit diesem identischen) 360. Teil des Vollwinkels. Dieser wird "1 (Winkel-) Grad" (1°) genannt.

Wenn wir um den Scheitel eines Zweibeins konzentrische Kreise zeichnen, also Kreise mit verschieden langen Radien R_i, schneiden die Schenkel des Zweibeins aus diesen Kreisen verschieden lange Kreisbögen B_i heraus. Wenn wir eine Beziehung zwischen den Längen "$l(B_i)$" und "$l(R_i)$ bei ein und demselben Zweibein suchen, finden wir, daß sich die Kreisbogenlänge proportional mit der zugehörigen Radiuslänge ändert,

(14.1) $\varphi^+ = \text{konst} = l(B_i) = k_3 \bullet l(R_i)$,

beziehungsweise, daß der Quotient aus den beiden Längen konstant ist.

(14.2) $\varphi^+ = \text{konst} \dashrightarrow l(B_i) \,/\, l(R_i) = k_3$

Selbstverständlich ist auch der Kehrwert dieses Quotienten konstant:

(14.3) $l(R_i) \,/\, l(B_i) = 1/k_3$

Wenn wir bei verschieden weit gespreizten Zweibeinen eine Beziehung zwischen dem Winkel φ^+ und dem Quotienten $l(B_i) \,/\, l(R_i)$ suchen, ist es deshalb gleichgültig, wie groß die zusammengehörenden Kreisbogen- und Radiuslängen bei den verschiedenen Zweibeinen sind. Es kommt nur auf das Verhältnis der Längen an. Und dieses läßt sich durch die Messung nur eines einzigen Längenpaares bestimmen. Bei der Suche nach der gesetzmäßigen Beziehung braucht man deshalb nur mit einer einzigen Radiuslänge (und den zugehörigen, bei den verschiedenen Zweibeinen verschieden großen Bogenlängen) zu arbeiten. Bei einem fingierten empirischen Vorgehen können wir zum Beispiel die in den Spalten 2 bis 4 der Tabelle 14.1 aufgelisteten Größen finden.

1	2	3	4	5	6
Zwickel Z	φ^+	$l(R_i)$	$l(B_i)$	$\frac{l(B_i)}{l(R_i)}$	$\frac{\varphi^+}{l(B_i)/l(R_i)}$
Z1	20°	10cm	3,49cm	0,349	57,3°
Z2	30°	10cm	5,24cm	0,524	57,3°
Z3	640°	10cm	10,47cm	1,047	57,3°
.....	.....	.....	.....	.....	.....

Tabelle 14.1. Größen, die bei einer (fingierten) empirischen Untersuchung der Beziehung zwischen er , l(Bi) und l(Ri) gemessen beziehungsweise berechnet werden

Da wir eine Gleichheitsbeziehung suchen, prüfen wir, welcher mathematische Ausdruck, der aus den jeweils zusammengehörenden Größen gebildet werden kann, bei allen Zweibeinen gleich ist.

Wir finden, daß das beim Quotienten in Spalte 6 der Fall ist:

(14.4) $\varphi^+ / l(B_i) / l(R_i) = 57{,}3° = k_4$.

Eine Umformung dieser Gleichung ergibt die gesuchte Beziehung:

(14.5) $\varphi^+ = k_4\, l(B_i) / l(R_i)$ mit

(14.6) $k_4 = 57{,}3°$.

Diese verallgemeinerte Bestimmungsgleichung können wir als Gesetzesgleichung formulieren:

(14.7) $\varphi^+ = k_4 \bullet l(B) / l(R)$.

In Worten: Der Winkel φ ändert sich proportional mit dem Quotienten „$l(B) / l(R)$".

Der Proportionalitätsfaktor $k_4 = 57{,}3°$ ist eine Größe der gleichen Art wie die Urgröße "Winkel φ^+", weil das Längenverhältnis "$l(B) / l(R)$" eine Zahl ist. Dieser Faktor ist erforderlich, um einen Ausgleich zwischen den (durch Art und Ausmaß bestimmten) Größen auf den beiden Seiten der Gleichung 14.7 herbeizuführen, und kann durch nichts aus der Welt geschafft werden; er ist der unentbehrliche (Ur-)Winkel-Längenverhältnis-Verknüpfungsfaktor.

Da der Quotient „$l(B) / l(R)$" eine Zahl ist, sind Urwinkel und Verknüpfungsfaktor Größen der gleichen Art. Hier liegen die Verhältnisse also anders als in den Fällen, in denen keine der miteinander verknüpften Größen eine Zahl ist. So ist in der Gleichung "$A^+(R) = k_1 \bullet l(A) \bullet l(B)$" der Faktor k_1 eine Größe anderer Art als $A^+(R)$ und als $l(A) \bullet l(B)$. Ebenso ist - um noch ein weiteres Beispiel zu nennen - die Dichte p, die zwischen den Größen "Masse m" und "Volumen V“ vermittelt ($m = p \bullet V$), eine Größe anderer Art als m und als V.

Da die Bezugsgröße (Einheit) jeder Urgröße unabhängig von den Bezugsgrößen andersartiger Größen festgelegt werden kann und da der Ausmaßfaktor im Produkt «Zahlenwert mal Einheit» von der Wahl der jeweiligen Bezugsgrößen abhängt, ist es - wie vom Areal her bekannt - möglich, die Bezugsgröße so zu wählen, daß der Ausmaßfaktor in der Konstanten k_4 die Zahl "1" ist. Das wird erreicht, wenn wir denjenigen Winkel φ_E als Bezugsgröße wählen, für den der Quotient "$l(B) / l(R)$" die Zahl "1" ist, also denjenigen Winkel φ_E , bei dem die Kreisbogenlänge und die zugehörige Radiuslänge gleich groß sind. Ich nenne diese Einheit (des Urwinkels!), die (ungefähr) 57,3-mal so groß ist wie 1°, ad hoc "1 Euklid" (1 E).

Die ungefähre Ausmaßbeziehung zwischen 1 E und 1° kann man durch tatsächliches Ausmessen leicht feststellen. Die genaue Beziehung findet man durch eine einfache Rechnung. - Für den zur Einheit "1°" gehörenden Quotienten "$l(B)/l(R)$" gilt:

(14.8.) $$\frac{l(B_1)}{l(R_1)} = \frac{2\pi l(R_1)/360}{l(R_1)} = \frac{2\pi}{360} = 0{,}017\,453\,29...$$

Für den zur Einheit "1 E" gehörenden Quotienten gilt:

(14.9) $\dfrac{l(B_2)}{l(R_2)} = \dfrac{l(R_2)}{l(B_2)} = 1$

Damit gilt die Proportion
(14.10.) $1E / 1^o = 1 / 0{,}017\,453\,29...$

und schließlich
(14.11.) $1\ E = 57{,}295\,788\ ...°$
Eine empirische Untersuchung unter Verwendung der Bezugsgröße "1 E" ergäbe die gesetzmäßige Beziehung

(14.12) $f+ = 1\ E \bullet l(B) / l(R) = k_4 \bullet l(B) / l(R)$ mit

(14.13) $k_4 = 1\ E$.

$k_4 = 1$ E ist identisch mit $k_4 = 57{,}3°$, weil 1 E = 57,3° ist und ein Einheitenwechsel - wie schon bekannt - an einer Größe nichts ändert.

Wenn es auf diese Weise auch gelingt, eine Gesetzeskonstante zu erhalten, die den für das Rechnen günstigen Ausmaßfaktor "1" hat, so ist es doch nicht möglich, die Konstante als solche zu beseitigen, etwa indem man sie - wie oft gesagt wird - «dimensionslos gleich 1 setzt». Wohl aber kann man sie auf die schon bekannte Weise mit dem Urwinkel zusammenfassen,
(14.14.) $1 / k_4\ \varphi^+ = l(B) / l(R) = \varphi$

und den Quotienten "$l(B) / l(R)$", der sich proportional mit φ^+ ändert, definitorisch als Ersatzgröße φ für den Urwinkel φ^+ festlegen:

(14.15) Winkelersatzgröße $\varphi = l(B) / l(R)$

φ ändert sich also nicht - wie meistens gesagt wird - proportional mit $l(B) / l(R)$; φ ist vielmehr definitionsgemäß $l(B) / l(R)$. Eine Proportionalität besteht nur zwischen φ und φ^+. Die Gleichung 14.15 ist keine Gesetzesgleichung, sondern eine Definitionsgleichung. Sie verknüpft nicht zwei Größen miteinander, die über einen Proportionalitätsfaktor "1" miteinander verbunden wären, sondern legt nur fest, daß das Symbol "φ" das Gleiche bedeutet wie das Symbol "$l(B) / l(R)$". φ ist ein Konstrukt, von dem man sagen kann, daß es mathematisch von der Länge l abgeleitet ist; der Urwinkel φ^+ ist dagegen eine Größe sui generis und kann deshalb nicht auf eine anschauliche Weise auf die Länge l «zurückgeführt» werden.

Die Bezugsgröße (Einheit) für die Ersatzgröße φ ist das Verhältnis zweier gleich großer Längen, also die Zahl "1" (14.9). Dieser werden aus pragmatischen Gründen die Zeichen "1 Radiant" beziehungsweise "1 rad" zugeordnet. Diese Zeichen sollen signalisieren, daß die vor dem Symbol "rad" stehende Zahl eine Winkelersatzgröße ist (und nicht eine andere Verhältnisgröße). 1 Radiant ist als ('reine') Zahl etwas anderes als die Bezugsgröße sui generis "1 Euklid". Gemäß der Definitionsgleichung 14.14 gilt ja:

(14.16.) $1\ \text{rad} = (1/E) \bullet 1E = 1$,

während 1 E = 1 ist.

Obwohl es aus dem Vorstehenden klar hervorgeht, sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Winkelersatzgröße - wie jede Verhältnisgröße - eine reelle Zahl ist und daß damit - was dem

Nichtfachmann meistens wohl nicht bewußt ist - auch 'reine' Zahlen physikalische Größen sein können.

Verhältnisgrößen, die 'reine' Zahlen sind, sind zum Beispiel die Dehnung (relative Längenänderung), die relative Dichte, die Poisson-Zahl, die Reibungszahl, der Wirkungsgrad, die Permitivitätszahl, die elektrische Suszeptibilität, der Leistungsfaktor, der Streufaktor, das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten, die Reynolds-Zahl, der osmotische Koeffizient, der Dissoziationsgrad, die Feinstrukturkonstante, die Brechzahl, der Emissionsgrad, der Reflexionsgrad und der Schallabsorptionsgrad.

Um keinen falschen Eindruck aufkommen zu lassen, weise ich darauf hin, daß Gleichungen der Art 4) "$\varphi = (1/E) \bullet \varphi^+$" keine unpräzise formulierten 'gemischten' Größen-Einheiten-Gleichungen sind. "E" steht in solchen Gleichungen nicht als Einheit, sondern für die einheitenbezogen angegebene Größe "$k_4 = 1$ E".

Und es sei schließlich noch darauf hingewiesen, daß 1 E (ebenso wie 1°) die Einheit einer Urgröße ist (φ^+), während 1 rad die Einheit einer Ersatzgröße ist (φ).

In der Größenlehre geht man einen Schritt über die Gleichung 14.15 hinaus und läßt die sachkennzeichnenden Indizes weg und erhält damit die übliche Gleichung

(14.17) $\varphi = l \,/\, l = l^0 = 1$.

Mit dem Wegfall des Sachindex' fällt der Hinweis auf die Sache und die Lagebeziehung weg, so daß die Winkelersatzgröße φ identisch wird mit anderen Verhältnisgrößen, zum Beispiel auch dem Tangens (dem Quotienten aus den Längen von Gegenkathete und Ankathete in einem rechtwinkligen Dreieck, die ebenfalls senkrecht aufeinander stehen) und dem Sinus (dem Quotienten aus den Längen von Gegenkathete und Hypothenuse in einem rechtwinkligen Dreieck, die nicht senkrecht aufeinander stehen). - Daß man Tangens, Sinus und weitere Größen als "Winkelfunktionen" bezeichnet, ändert nichts daran, daß diese auch (physikalische) Größen sind und als solche in die Rechnungen eingehen

Der Quotient "Kreisbogenlänge durch zugehörige Radiuslänge", der als Ersatzgröße für die Spreizweite φ^+ verwendet werden kann, wird in der Mathematik als "Winkel im Bogenmaß", im allgemeinen aber nur als "Winkel" bezeichnet.

Da der Unterricht die Schüler mit den in der Praxis tatsächlich verwendeten Größen bekannt zu machen hat, muß man auch im Unterricht zum Arbeiten mit der **Winkelersatzgröße** übergehen. Man sollte dabei den Schülern aber nicht einzureden versuchen, daß der Winkel, der uns im Phänomen gegeben ist, irgendwie der Quotient zweier Längen und damit eine 'reine' Zahl sei. Gerade das geschieht aber, wenn (immer wieder) verkürzte Ausdrücke der Art "Winkel gleich Bogenlänge durch Radiuslänge" oder gar "Winkel gleich Bogen durch Radius" verwendet werden.

Es sei noch erwähnt, daß für den (Ur-) Winkel auch andere Ersatzgrößen verwendet werden könnten. So ändert sich zum Beispiel auch der Quotient aus Kreisbogenlänge und Länge des ganzen Hilfskreisumfangs mit der vorstehend definierten Winkelersatzgröße und damit auch mit dem Urwinkel,

(14.18.) $$\frac{l(\mathrm{B})}{2\,\pi\, l(\mathrm{R})} = \frac{1}{2\,\pi} \bullet \frac{l(\mathrm{B})}{l(\mathrm{R})} = \frac{1}{2\,\pi} \bullet \varphi$$

und ebenso der Quotient aus dem Areal des Sektors, den die Zwickelbegrenzungsschenkel aus der Hilfskreisfläche herausschneiden, und dem Areal der gesamten Hilfskreisfläche,

(14.19) $$\frac{l(\mathrm{B}) \bullet l(\mathrm{R})/2}{\pi\, [l(\mathrm{R})]^2} = \frac{1}{2\,\pi} \bullet \frac{l(\mathrm{B})}{l(\mathrm{R})} = \frac{1}{2\,\pi} \bullet \varphi$$

14.2. Das Arbeiten mit der Urgröße φ^+ hat gegenüber dem mit der Ersatzgröße φ den Vorteil, daß die Eigenschaft "Spreizweite" als solche beim Rechnen besser im Blick bleibt, aber auch den schon bekannten Nachteil, daß man eine eigene Urgröße braucht, eine dazugehörige Verknüpfungskonstante und Einheiten einer eigenen Art. Wenn man mit φ arbeitet, arbeitet man nicht mit einem geometrischen Vierersystem (Länge, Areal$^+$, Volumen$^+$, ebener Winke), sondern (nach wie vor) mit einem geometrischen Einersystem (Länge, Länge hoch zwei, Länge hoch drei und Länge hoch null). Dieser Vorteil überwiegt in den Augen der meisten Fachleute den genannten Nachteil so sehr, daß im Größenkalkül ausschließlich mit der Winkelersatzgröße gearbeitet wird. Deshalb muß man, wenn ein Winkel in der Einheit "1°" (und damit als Urwinkel) angegeben ist, erst berechnen, welche in der Einheit "1 rad" anzugebende Winkelersatzgröße dem Urwinkel entspricht (zum Beispiel 90° $\triangleq \pi/2$ rad), und kann erst dann mit dieser Ersatzgröße in die Rechnung eingehen.

Da im Anfangsunterricht ausschließlich mit der Urgröße "Winkel$^+$" und der Bezugsgröße "1 (Winkel-) Grad" gearbeitet wird, sollte man beim Übergang zum Arbeiten mit der Winkelersatzgröße auf die Verwendung begriffsgemäßer Fachwörter achten, also zusätzlich zum Wort "Winkel" auch den Namen "Winkelersatzgröße" gebrauchen, also so verfahren, wie das vom Areal und vom Volumen her schon bekannt ist.

Anstelle des Namenspaares "Winkel/Winkelersatzgröße" könnte auch das Namenspaar "Spreizweite/Winkel" verwendet werden.

14.3. Die mit der Einführung der Winkelersatzgröße zu erreichende Vereinfachung beim Rechnen bedingt aber das Auftreten von Mehrdeutigkeiten und damit auch von Verständnisschwierigkeiten. Das zeigt eine von Otto Reeb in /31/ zusammengestellte Tabelle, die in der nachstehenden Tabelle 14.2 in etwas veränderter Form wiedergegeben ist:

- \- für den Winkel φ wird die gleiche Ersatzgröße verwendet wie für alle Verhältnisgrößen, nämlich eine Zahl,
- \- für die Rotationsgeschwindigkeit ω wird die gleiche Ersatzgröße verwendet wie für die Frequenz, nämlich t^{-1},
- \- das Drehmoment M, die Winkelrichtgröße R und die Rotationsenergie W_{rot} haben das gleiche Basisgrößenpotenzprodukt (die gleiche Dimension), nämlich $l^2 \bullet t^{-2} \bullet m$
- \- der Rotationsimpuls L und die Rotationswirkung w_{rot} haben ebenfalls ein gleiches Basisgrößenpotenzprodukt, nämlich $l^2 \bullet t^{-1} \bullet m$.

1[1]	2	3	4
Name und Symbol der Größe	übliche Definitionsgleichung	Basisgrößenpotenzprodukt im *l-t-m*-System	*l-φ-t-m-System*
Drehwinkel φ	....	1	φ^+
Drehdauer t	.....	t	t
Drehgeschwindigkeit ω	$w = d\varphi / dt$	t^{-1}	$\varphi^+ t^{-1}$
Drehbeschleunigung α	$\alpha = d^2 f / dt^2$	t^{-2}	$\phi^+ t^{-2}$
Trägheitsmoment I	$I = \int\left(\frac{l(R)}{\varphi}\right) dm$		
Drehmoment M	$M = I\, a$	$l^2 \bullet m$	$l^2 \bullet (\varphi^+)^{-2} \bullet m$
Winkelrichtgröße R	$R = dM / d\varphi$	$l^2 \bullet t^{-2} \bullet m$	$l^2 \bullet (\varphi^+)^{-1} \bullet t^{-2} \bullet m$
Drehimpuls L	$L = \int I d\varphi$	$l^2 \bullet t^{-2} \bullet m$	$l^2 \bullet (\varphi^+)^{-2} \bullet t^{-2} \bullet m$
Drehenergie W_{rot}	$W_{rot} = \int M d\varphi$	$l^2 \bullet t^{-1} \bullet m$	$l^2 \bullet (\varphi^+)^{-1} \bullet t^{-1} \bullet m$
Drehleistung P_{rot}	$P_{rot} = dW_{rot} / dt$	$l^2 \bullet t^{-2} \bullet m$	$l^2 \bullet t^{-2} \bullet m$
Drehwirkung w_{rot}	$w_{rot} = W_{rot} \bullet dt$	$l^2 \bullet t^{-1} \bullet m$	$l^2 \bullet t^{-1} \bullet m$

Tabelle 14.2. Rotationsgrößen und deren Basisgrößenpotenzprodukte im l-t-m-System und im l-φ-t-m-System. In Anlehnung an 0. Reeb

Im Lauf der Zeit empfanden viele Fachleute die angeführten Dimensionsgleichheiten als so störend, daß sie (de facto) vorschlugen, den Winkel im Kalkül doch als Basisgröße zu behandeln.

Reeb sagt nicht, daß der Winkel als Basisgröße behandelt, sondern daß «der Größenart Winkel eine eigene Dimension» zuerkannt werden solle. Er nennt den Winkel mit eigener Dimension auch nicht eine "Urgröße", sondern eine «axiomatische Größe». Im übrigen verwendet Reeb sowohl für den in Spalte 4 der Tabelle 14.2 verwendeten «axiomatischen» Winkel wie für die in Spalte 2 verwendete Winkelersatzgröße das (gleiche) Symbol "α".

Würde der genannte Vorschlag verwirklicht, wären die Dirnensionsgleichheiten beseitigt (Spalte 4 der Tabelle 14.2). Der Vorschlag fand aber bis heute keine allgemeine Zustimmung.

Es ist anzumerken, daß die abgeleiteten Größen der Tabelle 14.2 auch dann, wenn φ durch φ^+ 'rückersetzt' wird, abgeleitete Größen bleiben und nicht etwa auch selbst zu Urgrößen würden. Die in Spalte 2 angegebenen Gleichungen bleiben Definitionsgleichungen für Ersatzgrößen: In ihnen kommen keine Gesetzeskonstanten vor.

Weiter ist anzumerken, daß in Tabelle 14.2 für das Drehmoment nicht die im Vorstehenden allein verwendete Gleichung "M = $F \bullet l$ angegeben wird, sondern die Gleichung "M = $I \bullet \alpha$" (Drehmoment = Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung). Diese Gleichung entspricht formal der Gleichung "$F = m \cdot a$" für die Kraft (Kraft = Masse mal Translationsbeschleunigung). - Die Verwendung mehrerer Gleichungen für ein und dieselbe Größe ist nichts Besonderes, da für eine Größe im allgemeinen verschiedene Ersatzgrößen definiert werden können. So wird auch für die Kraft nicht nur die bisher allein erwähnte Gleichung (mit mechanischen Größen, $F=m \cdot a$) verwendet, sondern zum Beispiel auch die Gleichung "$F = Q \cdot E$" mit den beiden elektrischen Größen "elektrische Ladung Q" und "elektrische Feldstärke E" (siehe auch Abschnitt 20).

Kritisch ist zu dem von O. Reeb und auch von anderen gemachten Vorschlag anzumerken, daß in diesem offenbar nicht bedacht wurde, daß mit einer Basisgröße auch eine besondere Verknüpfungskonstante und Einheiten einer eigenen Art einzuführen sind. Es genügt nicht, einfach zu sagen, daß der Winkel φ eine Basisgröße und die Einheit "1 Radiant" eine Basiseinheit sei, also eine Einheit besonderer Art (und nicht die Zahl "1"), im übrigen aber die Gleichungen formal unverändert zu lassen und insbesondere keine Verknüpfungskonstanten einzuführen.

Werden zum Beispiel in einer Gleichung Winkel und Längenverhältnisse miteinander verbunden, kann der Winkel nicht als Basisgröße behandelt werden, wenn nicht auch der Winkel-Längenverhältnis-Verknüpfungsfaktor $k_4 = 1$ E in die Rechnung eingeht.

Wird mit der Winkelersatzgröße φ gearbeitet, gilt zum Beispiel für den Sinus eines Winkels die folgende Reihenentwicklung:

$$(14.20.) \sin\phi = \frac{\varphi^1}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots - \ldots$$

Der Sinus ist - wie jede Winkelfunktion - als Verhältnis der Längen zweier Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks eine 'reine' Zahl. φ ist ebenfalls eine Zahl. Und damit sind auch φ^3, φ^5 , φ^7 ... Zahlen, die addiert werden können. Mit der Gleichung 14.20 kann man deshalb problemlos rechnen. Wird nun lediglich gesagt, daß φ eine Urgröße sei und damit 1 rad eine Einheit eigener Art, stehen in den Zählern der Quotienten Terme der Art "2 rad", "8 rad^3", "32 rad^5", ..., so daß die Quotienten nicht addiert werden können (so wie man auch 2 m, 8 m^3 und 32 m^5 nicht addieren kann). - Will man die Spreizweite korrekt als Urgröße behandeln, ist diese als Basisgröße φ^+ mit der (hier so genannten) Bezugsgröße "1 Euklid" und der Verknüpfungskonstanten k_4=1E einzuführen. Es ist also nicht einfach zu sagen, daß φ (ohne Kreuz) als Basisgröße und 1 rad als Basiseinheit betrachtet werden; es ist vielmehr erforderlich, φ gemäß der Gleichung „$\varphi = (1/E) \cdot \varphi^+$ " 'zurückzuersetzen'. Dann erhält man statt 14.20 die Reihe

$$(14.21) \quad \sin \varphi^+ / 1E = \frac{(\varphi^+ /1E)^1}{1!} - \frac{(\varphi^+ /1E)^3}{3!} + \frac{(\varphi^+ /1E)^5}{5!} +- \ldots..$$

Da φ^+ mit der Bezugsgröße 1 E angegeben wird, stehen in allen Zählern auf der rechten Seite der Gleichung 14.21 (wie in 14.20) nur Zahlen, und es gibt keine Additionsschwierigkeiten. Mit 14.21 kann man mathematisch ebenso korrekt wie mit 14.20. rechnen; das Schreiben und Lesen dieser und ähnlicher Gleichungen wäre aber aufwendiger.

Ich kehre zum Hauptgedankengang zurück. - Würde der Winkel als Urgröße behandelt, könnte - wie schon gesagt - die Winkelbezugsgröße frei gewählt werden: Die Frage der Kohärenz zwischen der Urwinkeleinheit und den Einheiten anderer Größen wäre dann ohne Belang. Man könnte dann nicht nur 1 Winkelgrad und 1 rechten Winkel als Basiseinheit wählen, sondern auch 1 Vollwinkel beziehungsweise 1 Umdrehung. (Ein besser geeigneter Name wäre für diese Bezugsgröße noch zu suchen.) Diese Einheit ist geradezu naturgegeben und wäre äußerst praktikabel. Sie wird deshalb von vielen Praktikern dringend gewünscht.

Mit dieser Basisgröße wären zum Beispiel Winkelgeschwindigkeiten und Drehgeschwindigkeiten in gleichen Einheiten anzugeben und bräuchten damit nicht mehr unterschieden zu werden.

Auch die Unterscheidung der Größen "Kreisfrequenz ω" und "(Perioden-) Frequenz f, die durch die Gleichung "$\omega = 2\pi \bullet f$" verbunden sind, würde wegfallen. Diese Gleichung bereitet selbständig denkenden Schülern erhebliche Skrupel: Zwei Größen (ω ,f), die durch eine 'reine' Zahl (2π) verbunden sind, müßten Größen der gleichen Art sein. ω und f können aber nicht in einer Ausmaßrelation miteinander verglichen werden: Es geht wohl nicht an, zu sagen "$\omega_1 \lesseqgtr f_1$", wenn $\omega_1 = 2\pi \bullet f_1$ ist, oder gar zu sagen "$\omega_1 \lesseqgtr f_2$". Und man kann auch nicht sagen, daß die Addition einer Frequenz und einer Kreisfrequenz eine Frequenz ergebe beziehungsweise daß sie eine Kreisfrequenz ergebe. Die beiden Größen müßten demnach von verschiedener Art sein. Zur Klarheit trägt auch nicht bei, wenn in der Norm DIN 1304 für die (Perioden-) Frequenz f (nur) die Bezugsgröße "1 Hertz" (1 Hz) und für die Kreisfrequenz (Winkelfrequenz) $\omega = 2\pi \bullet f$ (nur) die Einheit "1 s^{-1}" angegeben wird mit der Anmerkung, daß «Hertz » der besondere Name für die SI-Einheit reziproke Sekunde bei der Angabe von Frequenzen» ist. - Eine tatsächliche Bereinigung brächte dagegen das Arbeiten mit der Basiseinheit "1 Vollwinkel", weil dann neben der Größe "Frequenz" eine Hilfsgröße "Kreisfrequenz" nicht mehr erforderlich wäre.

Aus didaktischer Sicht ist noch besonders anzumerken, daß die Dreh- beziehungsweise Winkelgeschwindigkeit "$\omega = d\varphi/dt$" mit der merkwürdigen Bezugsgröße "1 / s" (1 s^{-1}; 1 reziproke Sekunde) die Lernenden irritiert und verblüfft. Diese halten die Rotationsgeschwindigkeit für ebenso 'real' wie die Translationsgeschwindigkeit und sind deshalb irritiert, daß die erste Geschwindigkeit (nur) mit der Bezugsgröße "1 durch Sekunde" angegeben wird, während die zweite die Bezugsgröße "1 Meter durch Sekunde" hat. Sie fragen sich, ob eine Drehung und mit ihr der Drehwinkel irgendwie weniger 'real' sein soll als eine Verschiebung und mit dieser die Länge des Verschiebungsweges, weil für den Winkel keine Bezugsgröße eigener Art angegeben wird. Diese Frage ist durchaus berechtigt: Daß wir das Ausmaß des Drehwinkels mit Hilfe einer Zahl darstellen (und nicht als Produkt aus einem Ausmaßfaktor und einer Winkelbezugsgröße eigener Art), das Ausmaß der Weglänge aber als Produkt aus einem Ausmaßfaktor und einer Bezugsgröße eigener Art (und nicht als 'reine' Zahl), schreibt nicht die Natur vor; das ist (nur) konventionell so festgelegt. Es ist deshalb zu fragen, ob diese Konvention nicht in Frage gestellt werden sollte. Würde die irritierende Asymmetrie beseitigt, bräuchten sich die Schüler nicht mehr zu bemühen, sich unter "1 s^{-1}" (und unter der Bezugsgröße der sogenannten Winkelbeschleunigung "1 s^{-2}") etwas phänomenologisch Verständliches vorzustellen.

14.4. Entsprechendes wie für den ebenen Winkel (φ^+ gilt für den phänomenologischen Raumwinkel Ω. Dieser ist das räumliche Gegenstück zur zweidimensionalen Spreizweite und - wie jede meßbare Eigenschaft - eine Größe sui generis. Diese kann als die Öffnungsweite eines Kegels umschrieben werden und kann - jedenfalls im Prinzip - mit Hilfe von Meßkeilen als Urgröße gemessen werden.

Es wäre vorteilhaft, die Schüler daran zu gewöhnen, mit dem Wort "Öffnung" in erster Linie die Vorstellung eines hohlen Kegels mit zweidimensionaler Querschnittsfläche zu assoziieren, um so eine Gegenvorstellung zur eindimensionalen Spreizung zu haben.

Im übrigen ist anzumerken, daß der sogenannte räumliche oder Raumwinkel mit einem eigenen Namen (ohne den Namensteil "Winkel") bezeichnet werden sollte. Der (ebene) Winkel steht zum Raumwinkel in einem entsprechenden Verhältnis wie das Areal zum Volumen. Dieses hat noch niemand als "räumliches Areal" bezeichnet.

Empirische Untersuchungen würden zeigen, daß sich diese Urgröße proportional mit einem mathematischen Ausdruck leichter meßbarer (beziehungsweise berechenbarer) Größen ändert, so daß dieser Ausdruck als Ersatzgröße für die (tatsächliche) Eigenschaft "Öffnungsweite" eingeführt werden kann. Bei der Definition dieser Ersatzgröße geht man ähnlich vor wie beim ebenen Winkel. Bei diesem wird - wie bekannt - um den Scheitel eines Zweibeins ein Kreis(bogen) mit der Radiuslänge l(R) gezeichnet und die Länge l(B) des Kreisbogens bestimmt, der von den Schenkeln des Zweibeins begrenzt wird. Die Ersatzgröße ist der Quotient $\varphi = l(\mathrm{B}) / l(\mathrm{R})$" beziehungsweise - wenn wir nur die Art der Größen berücksichtigen: $\varphi = l / l = l^\circ = 1$. Beim räumlichen Winkel wird zur Definition einer Ersatzgröße um die Spitze des Kegels eine Kugel mit der Radiuslänge $l(\mathrm{R}_{\mathrm{Kugel}})$ gezeichnet und die Arealersatzgröße A(S) des sphärischen Flächenstücks S bestimmt, das (als «Kugelhaube») vom Kegel aus der Kugeloberfläche herausgeschnitten wird. Als Ersatzgröße Ω, die sich proportional mit der Urgröße Ω^+ ändert, ergibt sich:

(14.22) $\Omega = A(\mathrm{S})/[l(\mathrm{R}_{\mathrm{Kugel}})]^2$,

beziehungsweise - wenn wir die Sachbindung außer Betracht lassen:

(14.23) $\Omega = A/A = A^\circ = 1$.

Die zu den SI-Einheiten kohärente Einheit der Raumwinkelersatzgröße ist der Quotient, bei dem das Areal des sphärischen Flächenstücks gleich groß ist wie das Areal des Quadrats, das von zwei senkrecht aufeinander stehenden Kugelradien "R_{Kugel}" aufgespannt wird, und ist damit - wie beim ebenen Winkel - die Zahl "1". Dieser Zahl werden aus pragmatischen Gründen der Name "1 Steradiant" und das Symbol "1 sr" zugeordnet.

Wenn der in Rede stehende Kegel zu einer (Voll-) Kugel "ausartet" ist die Kugelhaube die Kugeloberfläche selbst und daher die Raumwinkelersatzgröße der Kugel:

(14.24) $\Omega\,(\text{Vollkugel}) = \dfrac{4\pi\,[l(\mathrm{R})]^2}{[l(\mathrm{R})]^2} = 4\pi$

Die phänomenologische Betrachtung des Raumwinkels und die Berechnung der Raumwinkelersatzgröße braucht nicht auf den Kreiskegel beschränkt zu werden. Die Form des sphärisch gewölbten Flächenstücks, die ein "verallgemeinerter" Kegel aus der Kugeloberfläche herausschneidet, kann beliebig sein. (Man denke am einfachsten an ein Lichtbündel, das von einer punktförmigen Lichtquelle ausgeht und von einer beliebig geformten Blende begrenzt wird.) Für die Berechnung der Raumwinkelersatzgröße kommt es nur darauf an, wie groß das Areal des sphärischen Flächenstücks (beliebiger Form) und wie groß die Länge des Kugelradius' ist.

14.5. Die Raumwinkelersatzgröße Ω ist nicht nur ebenfalls eine Zahl wie alle Verhältnisgrößen, sondern bedingt auch - entsprechend den Verhältnissen beim ebenen Winkel -, daß wichtige Größen der Strahlungsphysik und der Lichttechnik dimensionsgleich werden (Spalten 1, 2 und 3 der Tabelle 14.3):

- \- Die Strahldichte L_{e}, die spezifische Ausstrahlung M_{e} und die Bestrahlungsstärke E_{e} haben das gleiche Basisgrößenpotenzprodukt, nämlich L_{e}, und
- \- die Strahlungsstärke Ie und der Strahlungsfluß Φ_{e} haben das gleiche Basisgrößenpotenz-

produkt $l^2 \cdot L_e$.

Auch diese Dimensionsgleichheiten hielten im Lauf der Zeit viele Strahlungsphysiker und Lichttechniker für so störend, daß sie vorschlugen, den Raumwinkel wie eine Basisgröße («axiomatische» Größe) und den Steradiant wie eine Basiseinheit zu behandeln. Geschähe das, so hätten alle in Tabelle 14.3 aufgeführten Größen (bis auf die gleich definierten Größen "M_e" und "E_e") verschiedene Basisgrößenpotenzprodukte (Spalte 4). M_e betrifft die von einem Flächenstück ausgehende und E_e die auf das Flächenstück auftreffende Strahlungsleistung. Reeb verwendet in den Größentermen der Spalte 4 für den als «axiomatisch» betrachteten Raumwinkel - eben- so wie für die Raumwinkelersatzgröße - das Symbol "Ω".
Auch dieser Vorschlag konnte sich nicht für den gesamten Bereich der Physik durchsetzen.

Es ist anzumerken, daß die Größen der Tabelle 14.3 auch dann, wenn Ω durch Ω^+ 'rückersetzt' wird, abgeleitete Größen bleiben und nicht etwa auch selbst zu Urgrößen würden. Die in Spalte 2 angegebenenGleichungen bleiben Definitionsgleichungen für Ersatzgrößen: In ihnen kommen keine Gesetzeskonstanten vor.

Name und Symbol der Größe	Definitionsgleichung	Basisgrößenpotenzprodukt im	
		l-t-L_e-System	l-Ω-t-L_e-System
Raumwinkel	....	1	Ω^+
Strahldichte L_e	....	L_e	L_e
Spezifische Ausstrahlung	$M_e = \int L_e \cdot \cos\varepsilon d\Omega$	L_e	$\Omega^+ L_e$
Bestrahlungsstärke	$E_e = \int L_e \cdot \cos\varepsilon d\Omega$	L_e	$\Omega^+ L_e$
Strahlungsstärke	$I_e = \int L_e \cdot \cos\varepsilon dA$	$l^2 \cdot L_e$	$l^2 \cdot L_e$
Strahlungsfluß	$\Phi_e = \iint L_e \cdot \cos\varepsilon \cdot dA d\Omega$		
Bestrahlung H_e	$H_e = \iint L_e \cdot \cos\varepsilon \cdot dA d\Omega$	$l^2 \cdot L_e$	$l^2 \cdot \Omega^+ \cdot L_e$
Strahlungsmenge Q_e	$Q_e = \iint L_e \cdot \cos\varepsilon \cdot dA(d\Omega)dt$	$t \cdot L_e$	$\Omega^+ \cdot t \cdot L_e$

Tabelle 14.3.. Wichtige Größen der Strahlungsphysik und deren Basisgrößenpotenzprodukte in einem 1-t-L_e-System und in einem I-1-Ω-t-LeSystem. In Anlehnung an 0. Reeb /31/, /32/. - In die Tabelle sind die allgemeinen Strahlungsgrößen aufgenommen; deren Formelzeichen haben gemäß DIN 1304 den Index "e". In die Tabelle hätten ebenso gut die entsprechenden (und wohl geläufigeren) speziellen optischen Größen aufgenommen werden können (Leuchtdichte Lv, spezifische Lichtausstrahlung M_v, Beleuchtungsstärke E_v, Lichtstärke Lichtstrom Θ_v , Belichtung H_v, und Lichtmenge Q_v).

14.6. Es ist noch anzumerken, daß es im Deutschen Normenwerk nur Basiseinheiten und abgeleitete Einheiten gibt und daß die Einheiten "1 rad" und "1 sr" zu den abgeleiteten Einheiten gehören. Im Gegensatz dazu kennt die Generalkonferenz für Maß und Gewicht neben den Basiseinheiten und den abgeleiteten Einheiten noch die sogenannten ergänzenden Einheiten. Zu diesen gehören nur die Einheiten des ebenen Winkels und des Raumwinkels. Das soll offenbar den bestehenden Schwierigkeiten irgendwie Rechnung tragen, ist aber keine Lösung des Problems.