13. Urgröße und Ersatzgröße. Areal und Volumen

13.1. Die Aussage, daß die Multiplikation einer Länge mit einer zweiten Länge ein Areal ergebe, ist sorgfältig zu durchdenken: Sie ist nämlich - auch wenn wir uns an sie gewöhnt haben - schlechthin unverständlich. Die Eigenschaft "Areal" (eines Flächenstücks) ist wie jede Eigenschaft eine Eigenschaft sui generis und kann nicht auf die Eigenschaft "Länge" (zweier Strecken) «zurückgeführt» oder von dieser Eigenschaft «abgeleitet» werden. Was die Eigenschaft "Areal" ist, wird nicht durch 12.1 definiert. Das muß man vielmehr schon wissen, bevor man die Bedeutung der Gleichung "$1 \bullet 1 = A$" überhaupt erfassen (und das heißt: zutreffend erfassen) kann. Was das Areal ist, ist nur den Phänomenen zu entnehmen. - Zur Explikation des Begriffs "Areal" kann man - im einfachsten Fall - ein (schiefwinkeliges) Parallelogramm A und ein Rechteck B betrachten, deren Grundlinien und Höhen jeweils gleich lang sind (Bild 13.1). Das Parallelogramm wird (in Gedanken) in die Teilfiguren 1, 2 und 3 zerlegt. (Parallelogrammförmige Papierstücke können auch tatsächlich zerschnitten werden.) Werden diese Teilfiguren zum Rechteck B' zusammengesetzt, kann dieses mit dem Rechteck B zur Deckung gebracht werden (ist dieses mit dem Rechteck B deckungsgleich).

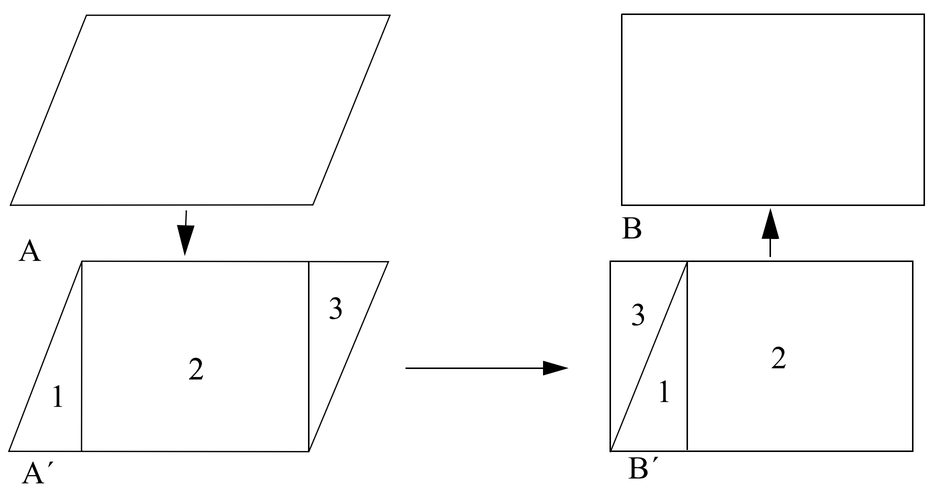

Bild 13.1. Zur Explikation des Begriffs "arealgleich"

Man kann Areal als Flächenbedeckung nun festlegen: Das Areal der beiden betrachteten Flächenstücke ist diejenige Eigenschaft, die beim Parallelogramm A ebenso groß ist wie beim Rechteck B. Allgemein kann man sagen: Das Areal ist diejenige Eigenschaft, die bei denjenigen geometrischen Figuren gleich ist, die (durch Aufteilen in Teilfiguren und deren Zusammensetzen in neuer Weise) so umgeformt werden können, daß sie zu deckungsgleichen Figuren werden. (Der Geometrieunterricht beschäftigt sich ausgiebig mit dem Umformen geradlinig begrenzter Figuren in Dreiecke [und Rechtecke], so daß hierauf nicht weiter einzugehen ist.) Denkt man sich die Figuren A und B in eine (unbegrenzte) Fläche eingebettet, kann man sagen, daß sie in dieser ein gleich großes (ein arealgleiches) Flächenstück bedecken oder erfüllen oder beanspruchen. Damit kann man verallgemeinernd sagen: Das Areal ist die Eigenschaft zweidimensionaler Figuren, ein Flächenstück bestimmter Größe zu bedecken oder bedecken zu können.

Das Areal kann damit als "Flächenstücksbedeckung" oder - kurz -als "Flächenbedeckung" umschrieben werden.

Die Länge wäre dementsprechend als "Linienstücksbelegung" oder -kurz - als "Linienbelegung" zu umschreiben.

Es ist offenbar nicht möglich, die Begriffe "arealig sein" („ein Areal haben") und "gleich arealig sein" („arealgleich sein", "ein gleiches Areal haben") unabhängig voneinander einzuführen: Im Vorstehenden mußte schon gesagt werden, wann zwei Flächenstücke gleich große Areale haben. Damit ist für den weiteren begrifflichen Aufbau nur noch festzuhalten: Ein Flächenstück A hat ein n-mal so großes Areal wie ein Flächenstück B, wenn es (oder ein aus ihm durch Umformung gebildetes Flächenstück) n lückenlos aneinander gelegte Flächenstücke B abdecken kann.

In der Mathematik werden die in ein x-y-Koordinatensystem eingebetteten Flächenstücke, die nicht allseitig von geraden Linien begrenzt werden, gedanklich zunächst in infinitesimale Rechtecke mit den Seitenlängen y_i und dx zerlegt (Bild 13.2). Dann werden die Areale dieser Rechtecke addiert („integriert").

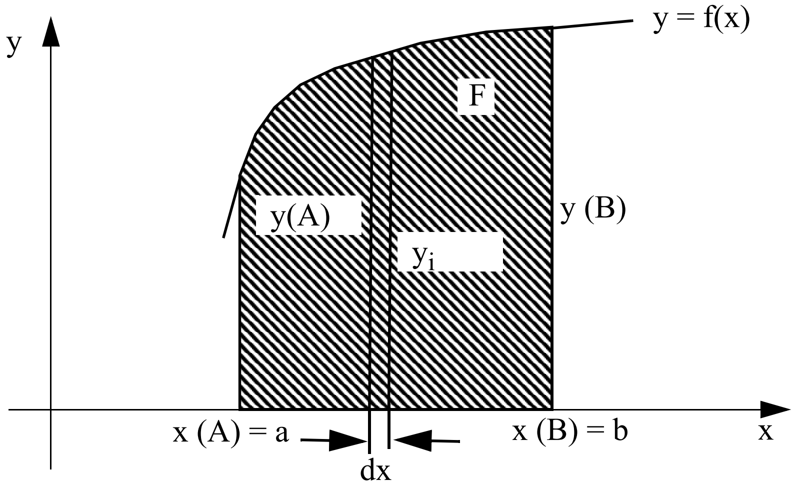

Bild 13.2. Zerlegung eines Flächenstücks F, das von einem Stück der Kurve mit einer Gleichung der Art "y = f(x)", einem Stück der x-Achse und den Strecken mit den Koordinaten y(A) und y(B) begrenzt wird, in infinitesimale Rechtecke mit den Seitenlängen $y_i = f(x_i)$ und dx

Ein Flächenstück F, das wie in Bild 13.2 begrenzt wird, hat das Areal

(13.1) $$A(F) = \int_a^b f(x)dx$$

Wie das Areal eines anders begrenzten Flächenstücks berechnet werden kann, sei mit Hilfe des Bildes 13.3 gezeigt. Wird das Flächenstück G von den Kurven y = f(x) und y = g(x) begrenzt, die sich in den Punkten A und B (Bild 13.3) schneiden, ist sein Areal

(13.2) $$A(F) = \int_a^b f(x)d(x) - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

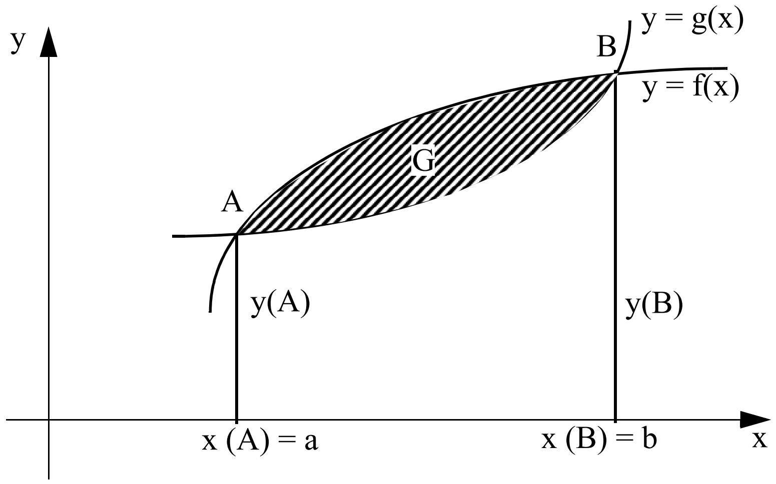

Bild 13.3. Zur Berechnung des Areals eines Flächenstücks G, das von Stücken der sich in den Punkten A und B schneidenden Kurven mit Gleichungen "y = f(x)" und „y = g(x)" begrenzt wird

Wie man das Ausmaß der Eigenschaft "Flächenbedeckung" (jedenfalls im Prinzip) messen kann, ergibt sich aus dem Vorstehenden: Man bedeckt die Figur mit Meßplatten, die ein bestimmtes Areal haben (und die - im Prinzip - quadratisch sind). Das Areal der interessierenden Figur ist so groß wie die Summe der Areale der die Figur deckenden Meßplatten. Das Areal ist damit als eine Eigenschaft sui generis gemessen.

Es braucht nicht näher ausgeführt zu werden, daß man zum tatsächlichen Ausmessen von Arealen mit Meßplatten einer einzigen Größe nicht auskäme, sondern einen Satz verschieden großer Meßplatten benötigte.

Im Besitz der vorstehenden Aussage kehren wir zur Behauptung von der Unbegreiflichkeit der Aussage zurück, daß die Multiplikation zweier Längen ein Areal ergebe. Wieso sollte diese als Eigenschaft sui generis meßbare Größe das Produkt zweier Längen sein? Die Multiplikation zweier Längen miteinander ist nur mathematisch gesehen kein besonderes Problem. Man faßt zum Beispiel das Produkt "5 m • 3 m" als ein Produkt auf, dessen Faktoren selbst wieder Produkte sind, betrachtet also dieses Produkt als ein Vierfaktorenprodukt "5 • m • 3 • m". Das Ausmultiplizieren geschieht dann so, daß man die Faktoren dieses Vierfaktorenprodukts in der Reihenfolge umstellt - also eine nach dem Vertauschungsgesetz der Multiplikation durchaus geläufige Operation durchführt - und die Faktoren erneut paarweise multipliziert:

(13.3) $5 \bullet m \bullet 3 \bullet m = 5 \bullet 3 \bullet m \bullet m = 15 \bullet m^2 = 15\ m^2.$

Bei dieser Operation behandelt man das Symbol "m" noch deutlicher als im Beispiel des Abschnitts 5 („3 m" als «Produkt aus Zahlenwert und Einheit«) wie ein Symbol für eine Zahl. - Es ist nicht Aufgabe dieser Arbeit, zu untersuchen, ob man nicht nur mit dem rechnen kann, was man üblicherweise unter "Zahlen" versteht, oder ob man alles, womit man nach den Regeln der Mathematik rechnen kann (also auch die Einheiten und Größen) als Zahlen bezeichnen soll. - Ob die Symbole "m" und "1 m" das Gleiche bedeuten (was man im allgemeinen wohl annimmt: 3 m = 3 • 1 m) oder ob hinter ihnen zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen stecken können, ist im dritten Teil noch zu prüfen.

Aber wie könnte eine solche Operation, also das rein mathematisch-formale Multiplizieren zweier Längen miteinander ein Areal ergeben? Was berechtigt uns, das Ergebnis einer solchen formalen Operation als ein Areal zu interpretieren?

Etwaige Versuche, eine solche Interpretation anschaulich zu begründen, also das Areal auf anschauliche Weise auf die Länge «zurückzuführen», sind zum Scheitern verurteilt. - Wenn man zum Beispiel eine Strecke von 1 m Länge senkrecht zu ihrer Erstreckung um 1 m verschiebt, bewegt sich die Strecke über eine quadratische Fläche von 1 m Seitenlänge (Bild 13.4). Dadurch wird aber das Areal dieser Quadratfläche, das ich ad hoc "1 plan" nenne, nicht anschaulich auf die Länge der bewegten Strecke und nicht auf die Länge des Verschiebungsweges «zurückgeführt».

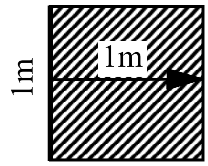

Bild 13.4. Verschiebung einer Strecke von 1 m Länge senkrecht zu ihrer Erstreckung um 1 m. Das Areal der überstrichenen Quadratfläche wird hier "1 plan" genannt.

Auch wenn man zur Definition des Terms "1 m^2" zunächst eine Strecke von 1 m Länge zeichnet, dann auf dieser in einem ihrer Endpunkte eine Senkrechte von 1 m Länge errichtet, dann das so erhaltene Zweibein zu einem quadratischen Streckenzug ergänzt (Bild 13.5) und sagt, daß das Ergebnis der Multiplikation "1 m • 1 m" das Areal des von diesem Streckenzug umschlossenen quadratischen Flächenstücks sei und daß dieses mit "1 m^2" bezeichnet werde, wird das Areal nicht anschaulich auf die Länge «zurückgeführt».

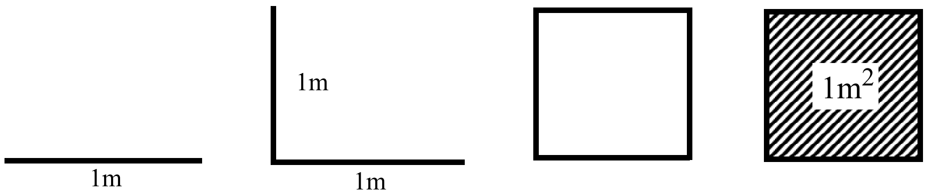

Bild 13.5. Zur Definition des Terms "1 m^2"

Was das Areal ist, ist auch in dieser Aussage schon als bekannt vorausgesetzt. Die Aussage legt nur fest, wie wir ein Areal bestimmten Ausmaßes bezeichnen, besagt aber nicht, was das Areal ist. Man muß das Areal als Areal, das heißt: als eine Eigenschaft sui generis messen können, bevor man empirisch Beziehungen zwischen dem Areal einer Figur und den Längen zweier kennzeichnender Strecken dieser Figur suchen und finden kann.

Um die Verhältnisse hinreichend differenziert beschreiben zu können, bezeichne ich die Eigenschaft sui generis, die durch Auslegen mit Meßplatten ermittelt werden kann, (im Gegensatz zum Produkt "Länge mal Länge") mit einem Wort, das ich bei Johannes Fischer /5/ fand, als eine Ur- oder Originalgröße und symbolisiere diese mit "A^+". Um einen verständniserschließenden Namen für das mit "A" symbolisierte Produkt "Länge mal Länge" zu finden, überlegen wir, wie man eine Beziehung zwischen dem Areal eines Rechtecks und den Längen von dessen Seiten empirisch ermitteln kann.

Wird ein Rechteck von 5 m Länge und 3 m Breite mit Meßplatten ausgelegt, deren Areal 1 plan ist, findet man, daß es ein Areal A^+ von 15 plan hat (Bild 13.6). Untersuchen wir empirisch-systematisch, welche Beziehung zwischen der Eigenschaft (Urgröße) "Areal A^+(R)" eines Rechtecks R und den Längen l(A) und l(B) der Rechteckseiten A und B besteht, können wir zum Beispiel die Größen der Spalten 2 bis 4 der Tabelle 13.1 ermitteln.

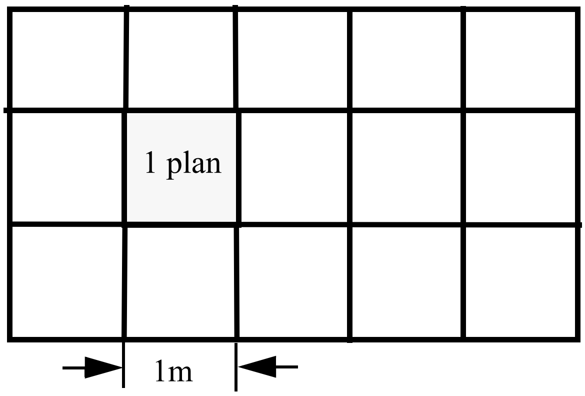

Bild 13.6. Zur (fingierten) empirischen Ermittlung der Beziehung zwischen der Urgröße "Areal" einerseits und den Längen der Seiten eines Rechtecks andererseits.

1	2	3	4	5
Rechteck R_i	$l(A_i)$	$l(B_i)$	$A^+(R_i)$	$\frac{A^+(R_i)}{l(A_i) \cdot l(B_i)}$
R	3 m	2 m	6 plan	$1 \frac{\text{plan}}{\text{m} \bullet \text{m}}$
R	3 m	3 m	9 plan	$1 \frac{\text{plan}}{\text{m} \bullet \text{m}}$
R	4 m	3 m	12 plan	$1 \frac{\text{plan}}{\text{m} \bullet \text{m}}$
R	5 m	1 m	5 plan	$1 \frac{\text{plan}}{\text{m} \bullet \text{m}}$

Tabelle 13.1. Zur Ermittlung der Beziehung zwischen den Seitenlängen $l(A_i)$ und $l(B_i)$ und dem Areal $A^+(g)$ von Rechtecken

Da wir eine gesetzmäßige Beziehung suchen und da diese Beziehung eine Gleichheitsbeziehung sein soll, fragen wir, wie wir die drei jeweils zusammengehörenden Größen so zu einem mathematischen Ausdruck vereinigen können, daß dieser Ausdruck bei allen Rechtecken gleich groß ist. Wir finden den im Kopf der fünften Spalte angegebenen Ausdruck

(13.4.) $$\frac{A^+(R_i)}{l(A_i) \bullet l(B_i)} = 1 \frac{\text{plan}}{\text{m} \bullet \text{m}} = k_1$$

und auch dessen Kehrwert. (Das Symbol „k_1" wird - ebenso wie die weiteren später noch zu verwendenden Symbole "k_i" nur ad hoc gebraucht.) Durch eine Umformung erhalten wir:

(13.5) $$A^+(R_i) = k_1 \bullet l(A_i) \bullet l(B_i).$$

Das Areal $A^+(R_i)$ ist also nicht das Produkt "$l(A_i) \bullet l(B_i)$", sondern eine Eigenschaft, die sich proportional mit diesem Produkt ändert.
Auch 1 plan ist nicht gleich 1 m • m, sondern gemäß 13.4.:

(13.6) $$1 \text{ plan} = k_1 \bullet \text{m} \bullet \text{m}.$$

Würden wir mit dem ebenfalls gleich bleibenden Kehrwert von k_1 arbeiten, .

$$\frac{l(A_i)\ l(B_i)}{A^+(R_i)} = \frac{1}{k_1}$$

erhielten wir für das Areal $A^+(R_i)$ ebenfalls den in 13.5 angegebenen Ausdruck

Die Gleichung 13.5 ist eine verallgemeinerte Bestimmungsgleichung; sie steht für Gleichungen der Art "$A^+(R_1) = k_1 \bullet l(A_1) \bullet l(B_1)$", in denen Symbole für einzelsachgebundene Größen stehen. Sie ist damit im Grunde bereits die Gesetzesgleichung. Es bereitet deshalb keine Schwierigkeiten, von 13.5 zur Gleichung

(13.7) $A^+(R) = k_1 \bullet l(A) \bullet l(B)$

überzugehen, in der Symbole für sachklassengebundene Größen stehen und die damit auch formal eine Gesetzesgleichung ist. 13.5 besagt: Das Areal A^+ eines Rechtecks (jedes Rechtecks) ändert sich proportional mit den Längen der beiden Rechteckseiten l(A) und l(B), gleichgültig wie groß diese Längen im konkreten Einzelfall sind. Wir finden - wenn wir empirisch vorgehen - aber nicht, daß das Areal das Produkt zweier Längen ist.

Die Angabe der Sachklassenbindung kann in den Gesetzesgleichungen - wenn diese zutreffend formuliert werden - nicht entfallen, da zum einen zum Beispiel die Gesetzesgleichung für Rechtecksareale eine andere ist als die für Dreiecksareale und da zum anderen die Seiten A immer senkrecht auf den Seiten B, stehen. (Das gilt auch für die beiden aufeinander senkrecht stehenden Radien deren Längen in den Gleichungen 12.4 und 12.6 unterschiedslos mit "r" symbolisiert sind.) "A" und "B" symbolisieren zwei Klassen von Strecken, die gegeneinander um 90° gedreht sind.

Würden als Längeneinheit 1 m und als Arealeinheit das Areal eines Quadrats von 1/2 m Seitenlänge gewählt, hier ad hoc als "1 Proklus" (1 P) bezeichnet, ergäbe die Ausmessung der Rechtecke der Tabelle 13.1 die Areale "24 P", "36 P", "48 P" und "20 P" und die Auswertung der Meßergebnisse die Konstante k_1 = 4 P/m • m. Diese ist identisch mit k_1 = 1 plan/m •m, da 1 plan = 4 P ist. (Wie schon bekannt, ändert ein Einheitenwechsel nichts an einer Größe.)

Das macht bewußt, daß man - um möglichst einfach rechnen zu können - den Zahlenfaktor der Konstanten k_1 durch die Wahl geeigneter, das heißt: zusammenpassender oder kohärenter Einheiten [wie 1 m und 1 m • m und nicht 1 m und (1/4) m • m] zu 1 machen kann. Sie zeigen aber auch, daß man den Faktor als solchen nicht aus der Welt schaffen kann. Er ist die Voraussetzung dafür, daß man das Areal $A^+(R)$ und das Produkt der Längen l(A) und l(B) überhaupt in einer Gleichung zusammenfassen kann: Er sorgt dafür, daß auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleiche Größen beziehungsweise Produkte gleicher Größen stehen:

(13.8) $A^+(R) = k_1 \bullet l/A) \bullet l(B) = \dfrac{A^+(R)}{l/A) \bullet l(B)}\ l/A) \bullet l(B) = A^+(R)$

(13.9) $15 \text{ plan} = k_1 \bullet 5 \text{ m} \bullet 3\text{m} = 1 \dfrac{\text{plan}}{\text{m} \bullet \text{m}} \bullet 5\text{m} \bullet 3\text{m} = 15 \text{ plan}$

(13.10) $60\ P = k_1 \cdot 5m \cdot 3m = 4\ \frac{p}{m \cdot m} \cdot 5m \cdot 3m = 60\ P$

Die Konstante k_1 ist also ein Areal-Längen-Verknüpfungsfaktor. Dieser ergibt sich beim Auswerten gemessener Größen und kann nicht weggeleugnet oder willkürlich «dimensionslos gleich 1 gesetzt» werden.

13.2. Man kann aber etwas ganz anderes machen: Man faßt das Areal $A^+(R)$ rein mathematisch mit der Verknüpfungskonstanten k_1 zusammen,

(13.11.) $(1/k_1) \cdot A^+(R) = l(A) \cdot l(B)$,

und erhält eine Gleichung, die (nur) verdeutlicht, was auch 13.5 schon besagt: Es ändert sich nicht nur das Areal $A^+(R)$ proportional mit dem sich rein mathematisch ergebenden Produkt "$l(A) \cdot l(B)$"; es ändert sich selbstverständlich auch dieses Produkt, das nicht selbst das Areal A^+ ist, proportional mit A^+. Dieses Produkt wird konventionell mit "A" symbolisiert (12.1),

(13.12) $l(A) \cdot l(B) = A(R) = (1/k_1) \cdot A^+(R)$,

und - bis jetzt - ebenfalls als "Areal" bezeichnet. Die Gleichung 12.1 definiert also nicht die Eigenschaft (Urgröße) "Areal A^+", sondern ein mathematisches Konstrukt, das - da es sich proportional mit A^+ ändert - als ein Maß für die Urgröße verwendet werden kann.

Ein Maß für eine Größe G_1 ist eine Größe G_2, die sich in gesetzmäßiger Weise - im Idealfall proportional - mit der Größe G_1 ändert.

Weil das Produkt „$l(A) \cdot l(B)$" ein Maß für die Größe A^+ ist, kann es im Größenkalkül als Ersatzgröße für die Urgröße fungieren. Tatsächlich geht man noch einen Schritt weiter und läßt in der Definitionsgleichung für das Konstrukt "Areal A" die Angabe der Sachbindung und damit auch die der Lagebeziehung der Längenhaber außer Betracht und schreibt nur

(13.13) „$A = l \cdot l = l^2$"

und erhält damit die Gleichung 12.1. Diese erfüllt nicht nur den Wunsch nach Kürze des Ausdrucks, sondern wird auch der Tatsache gerecht, daß die Längen der senkrecht aufeinander stehenden Seiten A und B ausschließlich in Einheiten der Art "1 m" angegeben werden und nicht zum Beispiel in Einheiten der Art "1 m längs" und "1 m quer".

Das Fallenlassen des Hinweises auf die Lagebeziehung hat beim Areal A keine besonderen Konsequenzen: Das Produkt ‚$A = l \cdot l$" wird nur für das Areal* (und für keine weitere Größe) als Ersatzgröße verwendet. Das ist aber - wie wir noch sehen werden - nicht immer so: Es gibt verschiedenartige Urgrößen, für die die Ersatzgrößen bei Nichtbeachtung der unterschiedlichen Lagebeziehungen identisch sind. (Siehe die Ausführungen über Arbeit und Drehmoment.)

Die Gleichung 13.13 (beziehungsweise 12.1) ist also keine Definitionsgleichung für die Eigenschaft "Areal A^+"; was diese Eigenschaft ist, ist phänomenologisch zu explizieren. **12.1 definiert** also nicht das Areal A^+, sondern die **Arealersatzgröße** A, also ein mathematisches Konstrukt, das anstelle der tatsächlichen Eigenschaft in den Größenkalkül eingehen kann und - aus noch zu besprechenden Gründen - in diesem auch ausschließlich verwendet wird.

Den verständniserschließenden Begriff der Ersatzgröße fand ich ebenfalls bei J. Fischer /5/, der diesen - zusammen mit dem Begriff der Ur- oder Originalgröße - bei der begrifflichen Untersuchung der verschiedenen früher verwendeten, mit nur drei Basisgrößen arbeitenden Größensysteme der Elektrizitätslehre benutzt. Fischer weist darauf hin, daß der Begriff der Ersatzgröße zuerst durch E. Brylinski /1/und F. Emde /4/ «bekannt gemacht» wurde.

Die Definitionsgleichung der Arealersatzgröße , $A = l \bullet l$ ist nicht mit der Gleichung "A(R) = l(A) • l(B)" (üblicherweise ebenfalls als „$A = l \bullet l$" beziehungsweise "A = a • b" geschrieben) zu verwechseln, die die Beziehung zwischen der Arealersatzgröße eines Rechtecks und den Längen der Rechteckseiten beschreibt. Die zweite Gleichung ist keine Definitionsgleichung, sondern eine Gesetzesgleichung. Man darf nur nicht übersehen, daß in dieser die Gesetzeskonstante die Zahl "1" ist und sich deshalb leich einem Bewußtwerden entzieht. [Man vergleiche hierzu die Gesetzesgleichungen für die Areale anderer Figuren (12.3 bis 12.6).]

Mit dem Wort "Arealersatzgröße" ist der verständniserschließende Name für die Größe A gefunden. Das Produkt zweier Längen fungiert als Arealersatzgröße, ist aber nicht das Areal A. Das Konstrukt "Länge mal Länge" ist **keine anschauliche Eigenschaft** von Flächenstücken, sondern eher ein den Flächenstücken nur äußerlich zugeordnetes **Merkmal** - aber bestimmt nicht ein Merkmal in der Bedeutung einer «Eigenschaft in präzisiertem Sinne» /19/.

13.3. Wir dürfen uns nicht dazu verleiten lassen, das sich bei einer mathematischen Operation ergebende Produkt "l(A) • l(B)" für eine (phänomenologische) **Eigenschaft** eines Rechtecks zu halten. Dieses Produkt ist - um es noch einmal eindringlich zu betonen - ein rein mathematisch-formales (und geometrisch-anschaulich nicht interpretierbares) Konstrukt. Wir sollten deshalb nicht versuchen, den Lernenden einzureden, daß das Produkt "Länge mal Länge" die Eigenschaft sei, an die unverbildete Schüler beim Wort "Areal" tatsächlich denken, nämlich die Eigenschaft, die im Vorstehenden mit dem Wort "Flächenbedeckung" umschrieben wurde. Eine solche Einrede ist pädagogisch nicht zu rechtfertigen, weil sich die Schüler unter der Zweimalpotenz einer Länge nicht eine tatsächliche Eigenschaft eines Flächenstücks und unter der Zweimalpotenz der Längeneinheit "1 m" nicht eine Arealeinheit vorstellen können.

Wir sollten den Schülern vielmehr klar zu machen versuchen, daß das geometrisch nicht zu veranschaulichende Produkt, das sich proportional mit A^+ ändert, anstelle von A^+ in die Rechnungen eingehen kann und auch tatsächlich an dessen Stelle im Kalkül verwendet wird. Man rechnet dann nicht mit der anschaulichen Eigenschaft selbst, sondern mit einem unanschaulichen, aber die Rechnungen erheblich vereinfachenden mathematischen Konstrukt.

Entsprechend rechnet man nicht mit der Einheit "1 plan" der Urgröße "Areal A^+", sondern mit der geometrisch ebenfalls nicht zu veranschaulichenden **Ersatzeinheit** "1 m^2", die mit 1 plan durch einen konstanten Faktor verbunden ist (13.4).

Die Schüler sollten sich also nicht (vergeblich) bemühen, mit den Zeichen "A" und "1 m^2" anschauliche Vorstellungen zu verbinden, sondern lernen, daß das Zeichen "A" (für die Arealersatzgröße) dem tatsächlichen und anschaulichen Areal A^+ und das Zeichen "1 m^2" (für die Einheit der Ersatzgröße) der tatsächlichen und (ebenfalls) anschaulichen Einheit "1 plan" (des Areals A^+) nur zugeordnet ist. Die Schüler haben also bei den Zeichen "A" und "1 m^2" an das anschauliche Areal A^+ und die anschauliche Einheit "1 plan" zu denken, sollten aber nicht versuchen, sich (irgendwie anschaulich) vorzustellen, daß die Ersatzgröße A die Eigenschaft "Flächenbedeckung A^+" sei und die Ersatzeinheit "1 m^2" die Einheit "1 plan".

Mit diesen Ausführungen werden nicht Neuerungen eingeführt; mit ihnen wird vielmehr nur versucht, die verschütteten und entstellten Grundlagen des Größenrechnens wieder bewußt zu machen (und auch gründlicher als bisher zu klären). Der Unterricht darf nicht mit Ersatzgrößen arbeiten, ohne daß den Schülern bewußt gemacht wird, daß - wie noch ersichtlich werden wird - im Größenkalkül vorwiegend mit diesen Konstrukten gerechnet wird, und ohne daß ihnen klar gemacht wird, warum mit diesen Ersatzgrößen gearbeitet wird. Der Unterricht darf nicht mit Begriffen und Begriffsbezeichnungen beginnen, die sich in der Praxis (mit deren Bedürfnis nach kurzen und verkürzten Ausdrücken) im Laufe einer langen Entwicklung ergeben haben, und erwarten, daß die Schüler die Vorstellungen und Vorstellungsbezeichnungen, die sie in den Unterricht mitbringen, ohne didaktische Hilfe mit den in der heutigen Größenlehre gebräuchlichen Begriffen und Namen in Einklang bringen könnten.

Die Verwendung des Namens "Areal" und des Symbols "A" sowohl für die Urgröße "Areal" wie für die Arealersatzgröße ist ein Verstoß gegen die Forderung nach semantischer Eindeutigkeit: Man verwendet ein und dasselbe Zeichen für zwei verschiedene Begriffe. Es ist deshalb erforderlich, diesen beiden Begriffen unterschiedliche Zeichen zuzuordnen: Das Areal A^+ des Rechtecks 1 ist 15 plan; die Arealersatzgröße A des Rechtecks 1 ist 15 m^2.

Falls der Name "Arealersatzgröße" zu schleppend erscheinen sollte, gibt es noch eine andere Möglichkeit, semantisch korrekt zu verfahren: Man bezeichnet die Urgröße nicht als "Areal", sondern benennt sie mit dem Namen, der sich phänomenologisch ergibt, also mit dem Namen "Flächenbedeckung". Man hätte dann den Namen "Areal" frei zur alleinigen Bezeichnung der Ersatzgröße, also der Größe, die auch bisher schon so bezeichnet wird. Das hätte auch den Vorteil, daß der Name "Flächenbedeckung" bei seinem jedesmaligen Gebrauch unmittelbar auf die tatsächliche Eigenschaft hinweisen und diese damit bewußt halten würde. (Nicht vorteilhaft wäre, daß bei dieser Art der Namensgebung der verständniserschließende Wortteil "-ersatzgröße" wegfiele.) Wie noch zu besprechen ist, werden insgesamt sehr viel mehr Ersatzgrößen verwendet als Urgrößen. Wenn man allen Urgrößen die phänomengerechten Namen gäbe und den Ersatzgrößen die bisher gebräuchlichen, könnte man die Sprache des Größenkalküls in eine verständniserschließende allgemeinere Sprache der Physik einbetten, ohne die sich phänomenologisch ergebenden Namen beim Kalkülgebrauch zu benötigen. - Mit diesem Vorteil wäre noch ein anderer gegeben, auch wenn dieser zunächst als ein Nachteil erscheinen mag: Man müßte für jede Eigenschaft, der eine Ersatzgröße zugeordnet ist, einen geeigneten Namen suchen und müßte - um diesen zu finden - die Eigenschaft in (sicherlich oft schwierigen) phänomenologischen Analysen untersuchen. Das ist aber gerade das, was bis jetzt (nicht nur von Physikern, sondern auch von Wissenschaftstheoretikern) viel zu stark vernachlässigt wurde. Da gerade das Unterlassen ausreichender phänomenologischer Klärungen letztlich die noch ungelösten Probleme der Kalkülsprache bedingt, kann der scheinbare Nachteil dazu führen, das Arbeiten mit dem Größenkalkül durch sorgfältige phänomenologische Betrachtungen zu unterbauen und auf diese Weise die Welt mit ihren tatsächlichen Eigenschaften besser im Blick zu behalten. Hier zeigt sich eine große - nicht nur fachdidaktisch, sondern auch fachlich wichtige - Aufgabe. So lange diese nicht geleistet ist, bleibt der hier schon benutzte Ausweg, Bezeichnungspaare der Art "Areal A^+" und "Arealersatzgröße A" zu verwenden.

13.4. Ich kehre zum Arbeiten mit der Ersatzgröße zurück. - In deren Besitz können wir zum Beispiel anstatt mit der Gleichung

(13.14) $A^+(\mathrm{D}_1) = 1/2 \bullet \mathrm{k}_1 \bullet l(\mathrm{G}_1) \bullet l(\mathrm{H}_1) = 10$ plan

mit der Ersatzgleichung

(13.15) $A(\mathrm{D}_1) = 1 / 2 \bullet l(\mathrm{G}_1) \bullet l(\mathrm{H}_1) = 10\ \mathrm{m}^2$
arbeiten.

Im Größenkalkül wird ausschließlich mit der Arealersatzgröße gerechnet, weil man mit deren Hilfe von einem geometrischen Größensystem (Abschnitt 16) mit zwei Basisgrößen, nämlich der Länge l und dem Areal A^+, zu einem geometrischen Einersystem übergehen kann, in dem nur noch mit der Eigenschaft "Länge l" und deren Zweimalpotenz "$l^2 = A$" gearbeitet wird. Das wird auch der Tatsache gerecht, daß Areale in der Praxis nicht durch Auslegen mit Arealmeßplatten gemessen, sondern daß Arealersatzgrößen mit Hilfe bestimmter Längen berechnet werden; nur diese Längen werden gemessen. Mit der Urgröße entfallen auch der Areal-Längen-Verknüpfungsfaktor und die Arealeinheiten sui generis (wie die ad hoc eingeführte Einheit "1 plan" und deren Vielfache und Bruchteile). Das vermindert den Schreib- und Rechenaufwand erheblich und macht im Falle anderer Größen - wie wir noch sehen werden - viele Untersuchungen überhaupt erst möglich (Abschnitt 18).

Gegen das Arbeiten mit Ersatzgrößen ist logisch nichts einzuwenden. Aber es muß den Schülern bewußt gemacht werden, daß man beim Gebrauch einer Ersatzgröße eben mit dieser und nicht mit der eigentlich gemeinten Eigenschaft rechnet. Dieses Bewußtmachen ist umso dringender geboten, als man üblicherweise nicht nur mit der Ersatzgröße für das Areal arbeitet, sondern diese - wie schon gesagt - auch noch als "Areal" bezeichnet.

Da das Areal A^+ eine anschauliche Eigenschaft sui generis ist und bleibt, kann sie nicht anschaulich auf das Konstrukt "$A = l \cdot l$ " zurückgeführt werden. Das Ableiten einer Größe von anderen Größen ist nur als das Definieren einer Ersatzgröße für eine Urgröße zu verstehen.

In den Gesetzes- und Bestimmungsgleichungen ist die Bindung der Größen an eine Sachklasse [$A(R) = l(A) \cdot l(B)$] beziehungsweise an eine Einzelsache [$A(R_1) = l(A_1) \cdot l(B_1)$] durch Indizes an den Größensymbolen zu kennzeichnen, während in den Definitionsgleichungen ($A = l \cdot l$) eine solche Kennzeichnung entfällt. Indizierte Größensymbole wie "$l(A)$" und "$l(A_1)$" sind immer Größen mit ihren beiden Konstituenten "Art" und "Ausmaß" zugeordnet (auch wenn das Ausmaß bei der Bindung der Größe an eine Sachklasse unbestimmt bleibt), und bringen auch eine Lagebeziehung zum Ausdruck, während die nicht indizierten Größensymbole die Art der Größen hervorheben, und zwar gleichgültig ob es sich um Ur- oder Ersatzgrößen handelt. Mit dem Abheben der Art von den Größen als solchen entfällt an den Größensymbolen der die Sache kennzeichnende und damit auf ein Ausmaß und eine Lagebeziehung hinweisende Index.

Das zeigt noch einmal, wie wichtig es ist, überall dort, wo es erforderlich ist, sorgfältig mit Indizes zu arbeiten. Da viel öfter mit Größen als solchen umgegangen wird, als Arten von Größen in Definitionsgleichungen hervorgehoben werden, sind grundsätzlich viel mehr Indizes als bisher zu schreiben. Diesem (scheinbaren) Nachteil steht außer dem großen Vorteil der besseren Verständlichkeit noch ein Vorteil gegenüber: Wenn das Fehlen eines Index am Größenzeichen grundsätzlich bedeutet, daß das ein Hervorheben der Art einer Größe ist, ist es nicht erforderlich, den Begriff der Dimension einzuführen und besondere Dimensionssymbole zu verwenden. - Hierauf werde ich im Abschnitt 16 noch eingehen.

13.5. Die in diesem Abschnitt beschriebenen tatsächlichen Verhältnisse den Schülern bewußt zu machen, ist sicherlich umständlicher, als einfach zu sagen, daß das Areal die «zweite Potenz der Länge» sei. Daß die Schüler diese Aussage überhaupt hinnehmen, liegt nur daran, daß sie bei der Anschaulichkeit der geometrischen Größe "Areal A^+" durchaus an die tatsächliche Eigenschaft denken und sich einfach daran gewöhnen, dem Areal A^+ das Produkt "Länge hoch zwei" zuzuordnen und schließlich dieses mathematische Konstrukt für das Areal und das Konstrukt "1 m^2" für eine Arealeinheit zu halten.

Da im Größenkalkül nicht nur im Falle des Areals, sondern - wie hier schon gesagt sei - im Falle aller abgeleiteten Größen nicht mit den Eigenschaften selbst gerechnet wird, sondern mit mathematischen Konstrukten, die als Ersatzgrößen für die Urgrößen fungieren, ist die für die Klärung dieses Sachverhalts erforderliche Unterrichtszeit aber gut angewendet: Wenn nämlich dieser Sachverhalt den Schülern verborgen bleibt, und zwar nicht nur beim Areal, sondern auch bei allen später zu behandelnden, der Anschauung oft kaum noch oder überhaupt nicht mehr zugänglichen Eigenschaften (man denke an die elektrischen), können die Lernenden nicht verstehen, was sie beim Rechnen mit abgeleiteten Größen tatsächlich machen. Wenn die Schüler lernen sollen, verständig mit Größen und Größengleichungen umzugehen, kommt alles darauf an, daß sie nicht einfach an das Arbeiten mit dem Größenkalkül gewöhnt werden, bis sie sich über diesen nicht mehr verwundern und dann glauben, die Sachverhalte verstanden zu haben. Es kommt darauf an, daß die Schüler zuerst die Sachverhalte verstehen und erst dann an das Arbeiten mit dem Größenkalkül gewöhnt werden.

Da nicht nur das Areal A^+, sondern auch die Arealersatzgröße A als (physikalische) Größe bezeichnet wird, sei zum Schluß dieses Unterabschnitts noch ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Namen "Größe" und "Eigenschaft" nicht gleichbedeutend sind. Da auch Ersatzgrößen als Größen bezeichnet werden, sind nicht nur die Eigenschaften Größen, sondern - und zwar zum weitaus größeren Teil - auch die mathematischen Konstrukte, die anstelle der Eigenschaften in den Kalkül eingehen. Es ist deshalb im Verlauf dieser Untersuchung noch sorgfältig zu klären, was alles unter dem Namen "Größe" verstanden wird beziehungsweise verstanden werden sollte.

13.6. Auch das Volumen ist nicht die «dritte Potenz der Länge» (/3), sondern die Eigenschaft der Dinge, ein Raumstück zu erfüllen beziehungsweise - wie im Falle einer Gasportion - zu beanspruchen. Diese Eigenschaft, die als "Raumerfüllung" bezeichnet werden kann, kann als Größe sui generis gemessen werden, und zwar - jedenfalls im Prinzip - durch Ausfüllen eines Dinges mit Meßwürfeln. Praktisch kann man diese Urgröße zum Beispiel dadurch bestimmen, daß man das (beliebig geformte) Ding in einer Flüssigstoffportion untertaucht, die sich in einem quaderförmigen und mit Hilfe von Meßwürfeln kalibrierten (˙geeichten˙) Gefäß befindet. Das Volumen des Dinges ergibt sich als Differenz zwischen dem Volumen, das die Flüssigstoffportion und das Ding zusammen haben, und dem Volumen, das die Flüssigstoffportion allein hat.

Ich spreche allgemein von "Flüssigstoff" und nicht von "Wasser", weil zur Volumenmessung der beschriebenen Art selbstverständlich immer Flüssigstoffe verwendet werden müssen, in denen sich das jeweilige Ding nicht auflöst. Und ich spreche von "Flüssigstoffen" und nicht von "Flüssigkeiten", weil Wörter mit der Endsilbe "-keit" in einer rationalen beziehungsweise rationalisierten Fachsprache nur Eigenschaften (und nicht auch Sachen) bezeichnen sollten. Man vergleiche hierzu das Wort "Festigkeit". Dieses ist nicht dem Feststoff zugeordnet, sondern dessen Eigenschaft, (bis zu einer bestimmten Belastungsgrenze) beständig (fest) gegenüber verformenden Kräften, also formbeständig oder formfest zu sein. Flüssigstoffe sind wie die Feststoffe volumenbeständig (:inkompressibel:), aber nicht formbeständig. (Gase sind auch nicht volumenbeständig, sondern erfüllen jeden ihnen zur Vefügung stehenden Raum.) - Die Verwendung des Wortes "Flüssigkeit" für den flüssigen Stoff selbst zwingt übrigens dazu, die die Flüssigstoffe kennzeichnende Eigenschaft, nämlich fließfähig (also nicht formbeständig) zu sein, nicht auch selbst als "Flüssigkeit" (entsprechend zu "Festigkeit") zu benennen. Tatsächlich benennt man die Eigenschaft, (mehr oder weniger leicht) zu fließen, überhaupt nicht, sondern sozusagen nur ihr Gegenteil, nämlich die Eigenschaft, dem Fließen doch einen gewissen Widerstand entgegenzusetzen („Zähigkeit", "Viskosität"). - Das Wort "Fließstoff", das sprachlich noch ˙griffiger˙ als das Wort "Flüssigstoff' wäre, kann nicht verwendet werden, solange es in der Fachsprache als zusammenfassender Obername für Flüssigstoffe und Gase benutzt wird.

Die empirische Untersuchung der Beziehung zwischen der Urgröße "Volumen V^+" eines Quaders und den Längen von Längs-, Breit- und Hochkante des Quaders, also bestimmter, den Quader kennzeichnender Strecken, ergibt, daß sich das Volumen V^+ proportional mit der Länge jeder dieser Kanten und damit auch proportional mit dem Produkt dieser Längen ändert:

(13.16) $V^{+}(Q) = k_2 \cdot l(A) \cdot l(B) \cdot l(C)$
(Q: Quader; A B, C: Kanten des Quaders).

Die Untersuchung ergibt aber nicht, daß das Produkt der drei Längen die Eigenschaft "Volumen V^{+}" sei. Da sich dieses Produkt proportional mit der Urgröße "Volumen" ändert,

(13.17) $l(A) \cdot l(B) \cdot l(C) = 1/k_2 \cdot V^{+}(Q) = V(Q)$,

kann man es aber als Maß und damit auch als Ersatzgröße für die tatsächliche Eigenschaft des Quaders verwenden.

Wird das Volumen anderer Körper empirisch ermittelt, findet man, daß sich dieses immer proportional mit den Längen dreier den Körper kennzeichnender Strecken ändert, und daß sich beim Auswerten der Meßergebnisse (außer beim Quader) eine von 1 verschiedene Gesetzeskonstante ergibt, zum Beispiel für eine Pyramide P mit rechteckiger Grundfläche

(13.18) $V(P) = 1/3 \cdot k_2 \cdot l(A) \cdot l(B) \cdot l(H)$,

für einen Kreiszylinder Z

(13.19) $V^{+}(Z) = \pi \cdot k_2 \cdot l(R) \cdot l(R) \cdot l(H)$,

und für eine Kugel K

(13.20) $V^{+}(K) = 4/3\ \pi \cdot k_2 \cdot l(R) \cdot l(R) \cdot l(R) = 4/3\ \pi \cdot k_2 \cdot [l(R)^3]$.

Die Volumina aller Körper und Dinge D werden also als ein Vielfaches des Volumens eines Quaders angegeben, dessen Seiten so lang sind wie drei bestimmte, den jeweiligen Körper kennzeichnende Strecken. Die Gesetzeskonstante kann also wiederum als **Formfaktor F** bezeichnet werden. Damit ergibt sich die für alle Körper D gültige verallgemeinerte Gleichung

(13.21) $V^{+}(D) = k_2 \cdot F \cdot (A) \cdot l(B) \cdot l(C)$.

Man kann - wie vom Areal her schon bekannt - V^{+} und k_2 zusammenfassen,

(13.22) $1/k_2 \cdot . V^{+}(D) = F \cdot l(A) \cdot l(B) \cdot l(C) = V(D)$,

und erhält damit ein Konstrukt $V(D)$, das als Maß für die Urgröße $V^{+}(D)$ und damit auch als Ersatzgröße für diese verwendet werden kann:

(13.23) $V(D) = F \cdot l(A) \cdot l(B) \cdot l(C)$.

Wird bei den Symbolen der Gleichung 13.23 die Angabe der Sachklassenbindung weggelassen, ergibt sich - da der Formfaktor auf die Art der Größen keinen Einfluß hat - für die Volumenersatzgröße V die geläufige Definitionsgleichung
(13.24) $V = l^3$ $(= 1/k_3 \cdot V^{+})$.

Damit ergeben sich für die Volumina der vorstehend angeführten Körper - in der üblichen Schreibweise - die Gleichungen

(13.25) $V(\mathrm{P}) = 1/3 \cdot a \cdot b \cdot h$,

(13.26) $V(\mathrm{Z}) = \pi \cdot r^2 \cdot h$,

(13.27) $V(\mathrm{K}) = 4/3\ \pi \cdot r^3$.

Ich gehe nicht darauf ein, wie die Gleichungen für die Volumina nicht-quaderförmiger Körper mit Hilfe der Integralrechnung berechnet werden.

Es ist noch anzumerken, daß - entsprechend den Ausführungen beim Areal - anstelle des Namenspaares "Volumen/Volumenersatzgröße" auch das Namenspaar "Raumerfüllung/Volumen" verwendet werden könnte.

Man kann zwar die Schüler daran gewöhnen, die Potenz "l^3" für das Volumen V^+ zu halten, würde die Lernenden damit aber nur daran gewöhnen, ein nicht durchschautes Scheinwissen für ein Wissen zu halten. l^3 ist nicht die Eigenschaft "Volumen V^+", an die unverbildete Schüler beim Wort "Volumen" denken, ist also kein Symbol für eine phänomenologische Eigenschaft, sondern ein Symbol für ein mathematisches Konstrukt.

Wenn zu unvermittelt gesagt wird, daß das Volumen die «dritte Potenz der Länge» sei, drängt sich dem Lernenden - und zwar gerade demjenigen, der sich mitzudenken bemüht - die Frage auf, wie das möglich sei. Erfaßt er den tatsächlichen Sachverhalt nicht zutreffend, klafft eine Lücke zwischen dem, was er den Phänomenen entnimmt, und dem, was im Unterricht gesagt wird. Und Lücken dieser Art häufen sich. Wir ersetzen ja bei jeder «Ableitung» einer Größe eine phänomenologische Eigenschaft durch ein mathematisches Konstrukt und verdrängen damit auch bei jeder «Ableitung» ein Stück der Wirklichkeit aus dem Blickfeld. Die phänomenologisch-physikalische Welt wird bei jeder Ableitung einer Größe um ein weiteres Stück durch eine mathematisch-physikalische Begriffswelt ersetzt. Dabei wird Schritt für Schritt eine Welt mathematischer Strukturen aufgebaut, der die meisten unserer Mitmenschen vielleicht staunend und bewundernd, aber mindestens innerlich ablehnend gegenüberstehen. Der heutige Unterricht konfrontiert die Lernenden häufig viel zu schnell mit dieser mathematisch-physikalischen Begriffswelt, statt die Schüler behutsam - und das heißt: in einer für die Schüler mitvollziehbaren Weise - von den Phänomenen zu dieser Begriffswelt hinzuführen.

Was die Schüler bei zutreffender begrifflicher und terminologischer Differenzierung zu lernen haben, ist allein der Sachverhalt, daß nur die Urgröße "Volumen V^+" (und nicht die üblicherweise als "Volumen" bezeichnete Größe V) eine Eigenschaft der Dinge ist, daß man aber aus Zweckmäßigkeitsgründen nicht mit dem Volumen V^+ rechnet, sondern mit der Volumenersatzgröße $V = l^3$, also einem mathematischen Konstrukt, das sich proportional mit der Urgröße ändert, und daß man folglich in dem die Geometrie betreffenden Teil des Größenkalküls nicht mit drei Eigenschaften (Länge, Areal$^+$, Volumen$^+$) sowie den zugehörigen Verknüpfungskonstanten und Ur-Einheiten rechnet, sondern nur mit der Länge und mit deren (sich nur mathematisch ergebenden) Potenzen "Länge hoch zwei" und "Länge hoch drei" sowie mit den entsprechenden Potenzen von Längeneinheiten.

Das zu klären, macht den Unterricht nicht komplizierter, als es die Sachverhalte sind. Sollen die Schüler die Physik der Natur und der technischen Welt wirklich verstehen, müssen sie befähigt werden, Phänomene auch quantitativ zu untersuchen; und dazu gehört wieder, daß sie den Größenkalkül verständig benutzen können. - Dessen Einführung ist im Unterricht zweifellos nicht 'nebenher' zu erledigen, sondern muß - an verschiedenen Stellen des Unterrichts - als eine eigene Unterrichtsaufgabe thematisiert werden.