Kapitel 12 . Definitionsgleichungen

Die phänomenologische Betrachtung der sogenannten abgeleiteten Größen wird im Unterricht im allgemeinen viel zu stark vernachlässigt. Man geht sehr schnell zur ˙Definition˙ dieser Größen durch «Ableitung» von anderen Größen beziehungsweise durch «Zurückführung» auf andere Größen über. So behandelt man zum Beispiel die Eigenschaft "Areal A" (den ˙Flächeninhalt˙, die ˙Fläche˙) sehr bald als die Zweimalpotenz (als die ˙zweite˙ Potenz /43/) der Eigenschaft "Länge":

(12.1) $A = l \bullet l = l^2$

Die Gleichung 12.1 unterscheidet sich grundsätzlich von den Gleichungen für die Areale verschiedenartiger geometrischer Figuren, die - bei Benutzung der üblichen Symbole - sowohl im Falle von Gesetzesgleichungen wie im Falle von Bestimmungsgleichungen zum Beispiel folgendermaßen geschrieben werden:

(12.2) $A = l \bullet b$) (Rechteck; l, b: Längen der Rechteckseiten),

(12.3) $A = 1/2 \bullet g \bullet h$ (Dreieck; g: Länge der Grundlinie, h: Länge der Höhe)

(12.4) $A = \pi \bullet r^2$ (Kreis; r: Länge des Kreisradius),

(12.5) $A = \pi \bullet a \bullet b$ (Ellipse; a, b: Längen der beiden Halbachsen),

(12.6) $A = 4\pi \bullet r^2$ (Kugeloberfläche; r: Länge des Kugelradius).

Bei Benutzung begriffsgemäßer Symbole wäre zum Beispiel anstelle der Gleichung 12.3 im Falle einer Gesetzesgleichung die schon früher verwendete Gleichung

(12.7) $A(\mathrm{D}) = 1/2 \bullet l(\mathrm{G}) \bullet l(\mathrm{H})$ (D: Dreieck)

zu schreiben und im Falle einer Bestimmungsgleichung die ebenfalls schon bekannte Gleichung

(12.8) $A(\mathrm{D}_1) = 1/2 \bullet l(\mathrm{G}_1) \bullet l(\mathrm{H}_1)$.

Wird zum Beispiel 12.3, also eine Gleichung aus der Gruppe 12.2 bis 12.6 als Bestimmungsgleichung benutzt, sind für "g" und "h" durch Art und Ausmaß bestimmte Längen wie 5 cm und 4 cm einzusetzen und ergibt sich für "A" ein ebenfalls durch Art und Ausmaß bestimmtes Areal, in unserem Beispiel 10 cm^2.

Was sollte aber in 12.1 für "l" und "A" eingesetzt werden? Und wie kommt man überhaupt zu dieser Gleichung?

Auf den ersten Blick sieht es aus, als käme man zu 12.1 durch eine Verallgemeinerung von Gleichungen der Art 12.2 bis 12.6. Eine genauere Betrachtung zeigt aber, daß das nicht der Fall ist. Die Gleichung 12.3 besagt: Das Areal eines Dreiecks ist halb so groß wie das Areal eines Rechtecks, dessen Seiten so lang sind wie die Grundlinie beziehungsweise die Höhe des Dreiecks. Und 12.4 besagt: Das Areal einer Kreisfläche ist π-mal so groß wie das Areal eines Quadrats, dessen Seiten so lang sind wie der Radius der Kreisfläche. In allen Gleichungen der Art 12.2 bis 12.6 werden also Areale bestimmter geometrischer Figuren mit dem Areal eines Rechtecks (das auch gleichseitig und damit ein Quadrat sein kann) in Beziehung gesetzt, dessen Seiten so lang sind wie zwei bestimmte Strecken, die die jeweilige Figur kennzeichnen, werden also die Areale dieser Figuren zu den Arealen bestimmter Rechtecke in eine Ausmaßrelation gesetzt. (In der

Gleichung für das Rechteckareal [12.2] - und nur in dieser - tritt deshalb kein von 1 verschiedener Zahlenfaktor auf.) Das Areal jedes Flächenstücks wird also als ein Vielfaches des Areals eines bestimmten Rechtecks formuliert. (Das Vielfache kann - wie in der Mathematik selbstverständlich - auch ein Bruchteil sein.) Der Zahlenfaktor, der die zueinander in Beziehung gesetzten Areale miteinander verknüpft, ist eine Gesetzeskonstante. Diese kann - da die Form des jeweiligen Flächenstücks von ausschlaggebender Bedeutung ist - als **Formfaktor F** bezeichnet werden. Durch Verallgemeinerung der Gleichungen 12.2 bis 12.6 kommt man deshalb zur Gleichung

(12.9) A(Flächenstück) = F • A (Rechteck, dessen Seiten so lang sind wie zwei bestimmte, das Flächenstück kennzeichnende Strecken

aber nicht zur Gleichung 12.1, in der keine Gesetzeskonstante vorkommt. 12.1 steht außerhalb der Gruppe der Gesetzesgleichungen und Bestimmungsgleichungen (12.2 bis 12.6) und ist als Definitionsgleichung zu bezeichnen. In sie ist für "*1*" und "*A*" überhaupt nichts einzusetzen. (Weiteres hierzu folgt im Abschnitt 13.) Die Zeichen in 12.1 stehen nicht für sachklassengebundene Größen [„*A*(D)"; *1*(G)"], deren Ausmaße zwar unbestimmt bleiben, aber doch immer mitgemeint sind, geschweige denn für einzelsachgebundene Größen [„$A(D_1)$"; "$1(G_1)$"], die - ebenso wie 10 cm^2 oder 5 cm - immer Art und Ausmaß zum Ausdruck bringen. Während 12.3 und 12.7 besagen, daß das Ausmaß des Dreiecksareals in bestimmter Weise vom Ausmaß der Längen von Grundlinie und Höhe abhängt, scheint 12.1 (nur) zu besagen: Die Multiplikation einer Länge mit einer zweiten Länge ergibt ein Areal, gleichgültig an welche Strecken die Längen gebunden sind und damit auch gleichgültig wie lang die Strecken sind. Die Gleichung 12.1 berücksichtigt auch nicht die Lage der Strecken zueinander, obwohl diese tatsächlich immer ein Rechteck aufspannen, also senkrecht aufeinander stehen müssen. Diese Gleichung verknüpft also Größen miteinander, bei denen Sachbindung und Ausmaß unbestimmt bleiben, und macht damit gewissermaßen nur eine Aussage über die Art der miteinander verknüpften Größen.

Wenn wir weitere der von Rudolf Fleischmann in /6/ aufgelisteten Größen und deren Definitionsgleichungen in die Betrachtung einbeziehen, zum Beispiel

(12.10) Volumen $V = A \cdot 1 = 1^3$,

(12.11) Winkel $\varphi = l/l = l^0 = 1$,

(12.12) Geschwindigkeit $v = l/t$ (*t*: Bewegungsdauer),

(12.13) Kraft $F = m_{tr} \cdot a$ (m_{tr}: träge Masse; a: Beschleunigung),

können wir erkennen, daß in keiner dieser Gleichungen eine Verknüpfungskonstante vorkommt. Es gibt damit neben Gleichungen, in denen Art und Ausmaß der Größen erfaßt oder zumindest mitbedacht werden (Bestimmungsgleichungen und Gesetzesgleichungen), noch Gleichungen, die anscheinend nur für die Art der Größen gelten (Definitionsgleichungen).

Bevor ich im nächsten Abschnitt hierauf und insbesondere auf die Frage, was die Definitionsgleichungen tatsächlich definieren, eingehe, habe ich noch drei Anmerkungen zu dem in diesem Abschnitt Gesagten zu machen.

(1) Der Formfaktor F ist nicht mit dem schon früher eingeführten Ausmaßfaktor A zu verwechseln. Der Formfaktor tritt in den gesetzmäßigen Beziehungen zwischen Areal und Längen von Flächenstücken auf (zum Beispiel in der Beziehung [„*A*(D) = (1/2)• *l*(G)•*1*(H)"], während der Ausmaßfaktor in jeder einzelnen einheitengebunden angegebenen Größe enthalten ist [zum

Beispiel in der Größe „$A(D_1) = 10\ cm^2$"].

(2) Da es ungewöhnlich erscheinen mag, die Zahlenfaktoren F in den Gleichungen 12.2 bis 12.6 als Gesetzeskonstanten und damit die Gleichungen selbst als Gesetze zu bezeichnen, sei darauf hingewiesen, daß die Verhältnisse bei den geometrischen Gesetzen völlig gleich liegen wie bei den Naturgesetzen. - In jedem Naturgesetz tritt eine Größe mehr auf, als Größen tatsächlich gemessen werden, eben die sogenannte Gesetzeskonstante. Um zum Beispiel das Gravitationsgesetz zu finden, das üblicherweise in der Form

(12.14) $F = \mathrm{f}\,(m_1 \cdot m_2) / r^2$

geschrieben wird, werden nur Kräfte (F), Massen (m_1 und m_2) und Längen (r) gemessen. Die Gravitationskonstante f ergibt sich zwangsläufig bei der Auswertung der Meßergebnisse zur Aufstellung des Gesetzes. In völlig gleicher Weise ergeben sich bei der empirischen Ermittlung der Beziehungen zwischen Arealen und kennzeichnenden Längen geometrischer Figuren die Formfaktoren F zwangsläufig bei der Auswertung der gemessenen Längen und Areale, ohne selbst gemessen zu werden. (Näheres hierzu folgt im nächsten Abschnitt.)

(3) Auch 12.2 ist eine Gesetzesgleichung. Das würde nur verkannt, wenn man übersieht, daß die Gesetzeskonstante die (sich dem Bewußtwerden leicht entziehende) Zahl "1" ist.