10. Intersubjektiv verständliche Aussagen über Eigenschaftsausmaße sind Aussagen über Ausmaßrelationen

10.1. Um physikalische Phänomene mathematisch behandeln zu können, ist es - wie schon beschrieben - erforderlich, das Beschaffensein der Sachen von diesen gedanklich als eine Eigenschaft abzuheben, da nur die abstrakten Eigenschaften, nicht aber die konkreten Sachen (in ihrem jeweiligen Beschaffensein) dem Größenkalkül unterworfen werden können. Um Aussagen über Eigenschaften unabhängig von deren jeweiligen Ausmaß machen zu können, ging man einen Schritt weiter und hob von den Eigenschaften (gedanklich) die schon genannte Art der Eigenschaft ab und stellte dieser das ebenfalls schon genannte Ausmaß der Eigenschaft gegenüber. Dieses Verfahren wurde und wird oft als ein «Zerlegen» der Größe in einen qualitativen und einen quantitativen Teil aufgefaßt. Und diese beiden Teile werden dann - im Extremfall - auch noch je einem Faktor des Produkts "Zahlenwert mal Einheit" zugeordnet. So stehen zum Beispiel noch im Jahre 1989 in der hauptsächlich an Gymnasiallehrer gerichteten Zeitschrift «Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht» (MNU) /14/ die folgenden Sätze:

- «Mit physikalischen Größen beschreibt man Qualität und Quantität von Objekten. Ein Größenwert wird deshalb dargestellt als Produkt eines Repräsentanten für die Qualität und eines Repräsentanten für die Quantität».
- «Der Zahlenwert repräsentiert die Quantität, die Einheit repräsentiert die Qualität».

Der Autor hält diese Aussagen für gesicherte Erkenntnisse und glaubt, auf deren Grundlage weitreichende Schlüsse ziehen zu können. Da die Auffassung, die in diesen Sätzen zum Ausdruck kommt, weit verbreitet ist und sich bei vielen hartnäckig hält (auch die Schriftleiter der Zeitschrift beanstandeten die Ausführungen des Autors offenbar nicht), muß ich auf sie eingehen. Das umso mehr, als sie ein geeigneter 'Aufhänger' zur Klärung einer wichtigen Frage sind.

Die Tatsache, daß wir eine Ausmaßgröße durch das Produkt "Zahlenwert mal Einheit" darstellen, zum Beispiel durch das Produkt "3 kg", erlaubt nicht den Schluß, daß die Einheit (nur) die Qualität angebe und der Zahlenwert (nur) die Quantität. Eine Einheit, zum Beispiel "1 kg", besagt nicht nur, um welche Eigenschaft (um die Eigenschaft welcher Art) es sich handelt, in diesem Beispiel also um die Masse; sie besagt auch etwas über das Ausmaß der Eigenschaft. 1 Kilogramm ist ja nicht irgendeine Masse, geschweige denn eine Masse ohne jedes Ausmaß, sondern die Masse des sogenannten Urkilogrammstücks und damit eben eine Masse ganz bestimmten Ausmaßes. **Die Einheit erfaßt immer sowohl die Art der Eigenschaft wie auch ein bestimmtes Ausmaß dieser Eigenschaft.** Und der sogenannte Zahlenwert einer Größe (eines 'Größenwerts') gibt nicht die Quantität (im Sinne eines Gegensatzes zur Qualität) an, sondern besagt, in welcher Ausmaßrelation die jeweils betrachtete Größe (zum Beispiel 3 kg) zu einer (gleichartigen) konventionell festgelegten Vergleichsgröße (1 kg) steht.

Um zu verstehen, warum wir Größen durch das Produkt "Zahlenwert mal Einheit" darstellen und darstellen müssen, sollten wir uns des folgenden Sachverhalts bewußt sein. - Jede sinnlich wahrnehmbare Eigenschaft ist jedem einzelnen von uns (in ihrer Art und in ihrem Ausmaß) unmittelbar nur in der eigenen sinnlichen Wahrnehmung gegeben. Man kann sich zum Beispiel vom Ausmaß der Masse eines Dinges nur dadurch einen unmittelbaren Eindruck verschaffen, daß man das Ding in die Hand nimmt und - zur Verdeutlichung der Empfindung, die uns einen Eindruck von Art und Ausmaß der Masse vermittelt - zum Beispiel wägend auf und ab bewegt. Es gibt deshalb für einen Kommunikationspartner A, der die Masse eines Dinges auf die eben beschriebene Weise abschätzt, keine Möglichkeit, einem Kommunikationspartner B, der sich an einem entfernten Ort befindet, ohne Rückgriff auf ein besonderes Hilfsmittel klar zu machen, wie groß das Ausmaß der Masse des Dinges ist. Eine Verständigung ist nur dadurch möglich, daß sich die Kommunikationspartner beizeiten einen Eindruck vom Ausmaß der Masse ein und desselben Dinges (oder von völlig gleichartigen Dingen) verschaffen und dieses Ausmaß als Bezugsausmaß festlegen und daß sie dann in ihrer Kommunikation die Massen aller Dinge als Vielfache dieser Bezugsmasse angeben. (Das Wort "Vielfaches" umfaßt in der Sprache der Mathematik auch Bruchteile.) Konkret gesprochen: Man legt das sogenannte Urkilogrammstück in Paris als Bezugsding (Etalon) verbindlich fest, definiert dessen Masse als Bezugsmasse, also als diejenige Masse, auf die alle Massenangaben zu beziehen sind, benennt diese mit dem Namen "1 Kilogramm" und gibt ihr das Kurzzeichen "1 kg". Wenn dieser Etalon oder genaue Kopien von ihm jedem Interessierten zugänglich sind, kann sich jeder durch (eigene) Sinneswahrnehmung einen Eindruck davon verschaffen, wie groß die verbindlich festgelegte Bezugsmasse ist, und kann dann auch mit Aussagen der Art, daß ein Ding 3 kg schwer sei (also 3-mal so schwer wie 1 Kilogrammstück beziehungsweise so schwer wie 3 Kilogrammstücke), eine zutreffende Vorstellung verbinden. - Es ist also das Folgende hervorzuheben.

(1) Die Einheit im Produkt "Zahlenwert mal Einheit" gibt nicht die «Qualität eines Objekts» an, sondern **immer Art und Ausmaß** einer bestimmten Eigenschaft einer bestimmten, konventionell festgelegten Bezugssache. Die Eigenschaft von Bezugssache 2 und betrachteter Sache 1 sind von gleicher Art. Und der Zahlenwert gibt nicht die «Quantität eines Objekts» an, sondern die Ausmaßrelation, in der eine bestimmte Eigenschaft der Sache 1 zur gleichartigen Eigenschaft der Bezugssache 2 steht.

(2) Eine Verständigung über Eigenschaftsausmaße ist nur dadurch möglich, daß man das Ausmaß der Eigenschaft einer Bezugssache als Hilfsmittel der Verständigung benutzt. Die Aussage "Die Masse des Dinges 1 beträgt 3 kg" ist eine Kurzfassung der Aussage "Die Masse des Dinges 1 ist 3-mal so groß wie die Masse des Urkilogrammstücks".

(3) Die Darstellung einer (skalaren) Größe durch ein Produkt aus Zahlenwert und Einheit ist erforderlich, damit man sich (intersubjektiv) über Ausmaßeigenschaften von Dingen überhaupt verständigen kann, und nicht, weil man «Qualität und Quantität von Objekten» getrennt beschreiben möchte oder auch nur könnte. Was sollte zum Beispiel eine von jeder Qualität unabhängige und nur durch eine Zahl dargestellte «Quantität eines Objekts» sein?

10.2. Die beschriebenen Sachverhalte haben eine wichtige Konsequenz. - Angabegleichungen der Art „m_1 = 3 kg" sind keine unmittelbaren Aussagen über das Ausmaß von Eigenschaften; sie sagen über diese nur insofern etwas aus, als sie die Eigenschaft einer Sache (das Ausmaß der Eigenschaft einer Sache) zur gleichartigen Eigenschaft einer Bezugssache (zum Ausmaß der gleichartigen Eigenschaft einer Bezugssache) in Relation setzen. Das heißt aber: Die Angabegleichungen sind keine unmittelbaren Aussagen über Eigenschaftsausmaße, sondern Aussagen über Ausmaßrelationen: **Intersubjektiv verständliche Aussagen über Eigenschaften (Eigenschaftsausmaße) sind Relationsaussagen.**

In der Kalkülsprache machen wir also nicht nur keine unmittelbaren Aussagen über Sachen, sondern auch keine unmittelbaren Aussagen über Eigenschaften - jedenfalls so weit es deren Ausmaß betrifft. (Die Art der Eigenschaft kommt implizit in den Zeichen [Namen und Symbolen] der jeweils interessierenden Größen und Einheiten zum Ausdruck). Das Ausmaß der Eigenschaft wird (notwendig) nicht unmittelbar, sondern als Vielfaches eines Vergleichsausmaßes, also in Form einer Relation dargestellt. Wir gehen also beim Anwenden des Größenkalküls tatsächlich nicht von Aussagen über Sachen zu (unmittelbaren) Aussagen über Eigenschaften über, sondern zu Aussagen über Relationen zwischen Eigenschaften von Sachen. Wir machen in der Kalkülsprache also auch über Eigenschaften - soweit es deren Ausmaß betrifft - nur mittelbare Aussagen. (Über die Art der Eigenschaften macht der Größenkalkül überhaupt keine Aussagen.)

Das sollte den Lernenden deutlich gemacht werden, damit ihnen immer bewußt bleibt, wie weit die abstrakte Sprache des Größenkalküls von der (Protokoll-) Sprache entfernt ist, die die Sachverhalte unmittelbar beschreibt (oder doch beschreiben sollte). Man sollte nicht von der Voraussetzung ausgehen, daß die Schüler diese Verhältnisse von selbst durchschauen und die Sachverhalte trotz der Kalkülsprache schon nicht aus den Augen verlieren werden. Die Gefahr, daß die Schüler die Sachen doch aus den Augen verlieren, wird im Unterricht noch dadurch vergrößert, daß dieser zunehmend mehr auch mit abgeleiteten Größen arbeitet, also von vergleichsweise anschaulichen geometrischen und einfachen mechanischen Sachverhalten zu weniger anschaulichen, wie zum Beispiel den elektrischen, weiter fortschreitet.

Daß die vermeintlichen Eigenschaftsaussagen nicht nur im Falle der Masse, sondern - wie im Vorstehenden schon mit ausgesagt - immer Relationsaussagen sind, braucht nicht besonders begründet zu werden. Denn selbstverständlich ist auch eine Aussage der Art "Die Länge des Stabes 1 ist 3 m" eine Relationsaussage. Der genannte Satz besagt ja: "Die Länge des Stabes 1 ist dreimal so groß wie die Länge des Abstandes zweier bestimmter Ritzmarken auf dem sogenanten Urmeterstab" oder - bei Verwendung der heute gültigen Meterdefinition. Die Länge des Stabes 1 ist 3-mal so groß wie die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von 1/299 792 458 Sekunden (also in etwas mehr als 3 Milliardstel Sekunden) durchläuft.

10.3. Nach den vorstehenden Ausführungen ist klar, wie die Bedeutung der Ausdrücke "Zahlenwert" und "Einheit" im Produkt "Zahlenwert mal Einheit" sprachlich zutreffend zu bezeichnen oder mindestens zu umschreiben ist. Die sogenannte Einheit ist - wie gesagt - zunächst die Etalongröße, die als Mittel der Verständigung über Eigenschaftsausmaße dient. Und der sogenannte Zahlenwert ist der Ausmaßfaktor A, der angibt, wievielmal die Sachgröße größer ist als die Etalongröße. Dieser Faktor kann ganzzahlig oder unganzzahlig und größer oder kleiner als 1 sein.

Damit die Ausmaßfaktoren praktikabel große Zahlen sind, wird die Sachgröße nicht immer auf die Etalongröße bezogen, sondern oft auch auf dekadische Vielfache und Bruchteile dieser Größe (1 Dekameter, 1 Hektometer, 1 Kilometer, ..., 1 Dezimeter, 1 Zentimeter, 1 Millimeter, ...). (Bei einigen Größen, wie Dauern und Winkeln, werden im allgemeinen nichtdekadische Vielfache verwendet: 1 Stunde = 60 Minuten = 60 • 60 Sekunden, ...)

Wenn man bei einer Größenangabe die Etalongröße durch eine 1000mal kleinere Einheit ersetzt, ergibt sich zwangsläufig ein 1000-mal größerer Ausmaßfaktor:

(10.1) 0,003m =1000 • 0,003 m/1000 = 3mm.

Obwohl die sogenannten Zahlenwerte in den beiden Angaben (0,003 m; 3 mm) verschieden groß sind, sind die beiden Längen doch (identisch) gleich groß. Diese mathematische und logische Selbstverständlichkeit (die aber für die Ablösung des sogenannten Zahlenwertrechnens durch das Rechnen mit Größen von ausschlaggebender Bedeutung war) wird durch den gewichtig klingenden Satz umschrieben «Die Größen sind invariant gegenüber einem Einheitenwechsel».

Wenn wir die Etalongrößen und deren (vorwiegend dekadische) Vielfache und Bruchteile als Bezugsgrößen oder Standardgrößen G(St) zusammenfassen, können wir statt der üblichen allgemeinen Darstellungsgleichung einer Größe,

(10.2) Größe = Zahlenwert mal Einheit,

die Gleichung

(10.3) Sachgröße = Ausmaßfaktor mal Bezugsgröße,

(10.4) $G(S) = A \bullet G(St)$

schreiben. Mit den Gleichungen 10.3 und 10.4 ist dreierlei gewonnen.

(1) Das übliche merkwürdige Wort "Zahlenwert" ist durch den begriffsgemäßen Terminus "Ausmaßfaktor" ersetzt. Damit tritt an die Stelle eines auch schon von anderen beanstandeten Wortes ein Name, der schon vom Wortsinn her besagt, worum es sich handelt, nämlich um den eine Ausmaßrelation darstellenden Quotienten

(10.5) $A = G(S) / G(St)$

(2) Das ebenfalls merkwürdige und insbesondere 'farblose' Wort "Einheit" ist durch den Namen "Bezugsgröße" ersetzt, der bei jedem Gebrauch daran erinnert, worum es sich handelt, und der insbesondere schon von der Wortbedeutung her unmißverständlich sagt, daß die sogenannte Einheit ebenfalls eine Größe (und nichts anderes) ist.

(3) Die Bezeichnung "Sachgröße" erinnert bei jedem Gebrauch daran, daß die in den Angabe-, Bestimmungs- und Gesetzesgleichungen geschriebenen Terme immer sachgebundenen Größen zugeordnet sind und nicht auch Größen, die irgendwie losgelöst von jeder Sache 'frei im Raum schweben' könnten («allgemeine Größen»).